01 Ако кандидатствате след 7 клас

02 Ако кандидатствате във ВУЗ

03 Олимпиади + Подготовка

04 Издирване на таланти уМ+

05 Конкурси

06 М+ Семинар

М+

помагало за математика и информатика

1/2 2019

национален конкурс уМ+ издирване на таланти

М+ е одобрено от МОН
за класна и извънкласна работа
по математика и информатика

МАТЕМАТИКА ПЛЮС
гр. София, 1618, кв. "Овча купел"
ул."Гусла" №1
тел: +359 2 401 58 12, факс: +359 2 401 58 21
e-mail: office@vuzf.bg
www.vuzf.bg

ВУЗФ
Университет
по финанси, бизнес
и предприемачество

ISSN 0861-8321 (print)
ISSN 2603-4964 (on line)

Цена 7 лв.

МАТЕМАТИКА +

МАТЕМАТИКА ПЛЮС

п о м а г а л о   п о   м а т е м а т и к а   и   п р и л о ж е н и я

одобрено от Министерството на образованието и науката за класна и извънкласна работа

Quarterly, Volume 27 (105-106), Number 1-2, 2019

Помагалото се издава от
ВУЗФ – Университет по финанси, бизнес и предприемачество

Адрес на редакцията:
ВУЗФ, стая 409
ул. „Гусла" № 1, 1618 София
тел. 02-40-15-830; e-mail: sava.grozdev@gmail.com

Материали за публикуване изпращайте в два екземпляра до редакцията или до член на редакционната колегия на горния адрес. Препоръчително е ръкописите да не надвишават 6 страници. Желателно е използването на електронни носители (в такива случаи да се посочва използваният софтуер). Илюстрациите и чертежите в текста да се представят на отделен лист. Ръкописи не се връщат.

Формат $600 \times 840/8$	Печатни коли 8	**ISSN 2603-4964** (онлайн)
Дадена за публикуване на 23.06. 2019	Публикуване на 13.07. 2019	**ISSN 0861-8321** (книжен вариант)

MATHEMATICS PLUS

HANDBOOK FOR MATHEMATICS AND ITS APPLICATIONS

approved by the Ministry of Education and Science for class and extracurricular activities

Quarterly, Volume 27 (105-106), Number 1-2, 2019

The journal is edited by
VUZF – University for Finance, Business and Entrepreneurship

Address of the Editorial Boards:
VUZF, Room 409
1 Gusla Street, 1618 Sofia
Tel. 02-40-15-830; e-mail: sava.grozdev@gmail.com

Materials for publication should be sent in two copies to the Editorial Board or to a member of the Board using the address above. It is recommended that each material contains no more than 6 pages. Submitting an electronic version together with the paper copy is desirable (the corresponding software should be indicated in such a case). Illustrations and figures should be submitted separately. Sent materials would not be returned.

Format $600 \times 840 / 6$	Printed sheets 8	**ISSN 2603-4964** (online)
Prepared for printing on 23.06.2019	Printed on 13.07.2019	**ISSN 0861-8321** (printed)

Mathematics Plus
issue 1–2, 2019

MATHEMATICS PLUS is a handbook for kids, pupils, school and university students, professional mathematicians, for all, who have enjoyed the beauty of Mathematics or strive to touch it. In a popular, attractive and approachable way the journal publishes notes and articles with original results, reviews on subjects with considerable importance for Mathematics and its applications; famous mathematicians and their achievements are presented; information is proposed for Bulgarian and foreign schools, colleges, universities, foundations; materials by outstanding experts are elaborated to help acceptance in higher educational institutions, foreign language schools, mathematical and professional lyceums; International and Balkan Mathematical Olympiads, various other mathematical competitions in Bulgaria and abroad are discussed; different contests with awards are organized; special attention is directed to youngsters suggesting suitable topics and tasks to them; professionals with achievements in Mathematics but also in other domains are presented; mathematical puzzles, magic squares, challenging games and toys are proposed; lotteries with object awards are organized.

IN THIS ISSUE:

ISSN 0861-8321 (printed) **ISSN 2603-4964 (online)**

Математика плюс
бр. 1–2, 2019

МАТЕМАТИКА ПЛЮС е помагало за деца, ученици, студенти, професионални математици, за всеки, който се е наслаждавал на красотата на математиката или се стреми да я докосне. В популярна, привлекателна и достъпна форма се публикуват съобщения и статии с оригинални резултати, обзори на важни за математиката и приложенията направления; представят се известни математици и техните постижения; дава се информация за български и чужди училища, колежи, университети, фондации; предлагат се материали от изтъкнати специалисти за кандидатстващите във висшите учебни заведения, езикови училища, математически и професионални гимназии; отразяват се международните олимпиади и балканиади и математически състезания у нас и в чужбина; организират се конкурси с награди; специално място се отделя на най-малките с подходящи теми и задачи; представят се професионални математици, които освен в математиката имат постижения и в други области; предлагат се математически ребуси, магически квадрати, интересни игри и играчки; организират се томболи с предметни награди.

В БРОЯ:

Драги читатели,

Завърши тазгодишната кампания по организацията и провеждането в България на Международното математическо състезание „Европейско кенгуру”. На 7 юни в Министерството на образованието и науката се състоя награждаването на победителите. Това са най-добрите математици – ученици от първи до дванадесети клас и студенти. Най-добрите са, защото от явилите се на Областния кръг на 23 март 2019 г. близо 45 хил. ученици бяха избрани 390 с най-високи резултати по предварително публикувания регламент и те взеха участие в Националния кръг на 1 юни. Лауреатите на тазгодишното „Европейско кенгуру” са призьорите от Националния кръг. Те получиха грамоти, медали и награди на 7 юни, връчени от г-жа Таня Михайлова – зам. министър на образованието и науката. С грамоти, медали и награди бяха поощрени и учениците с най-високи резултати от групата със специални образователни потребности и от групата на студентите. Не бяха забравени и тези, които участваха в състезанието с темите на френски език. Поздравление към тях, както и към присъстващите на награждаването учители, родители, близки на лауреатите и колеги от министерството отправи г-н Оливие Кашлер от Institute Francais в София – аташе за университетско и научно сътрудничество между България и Франция.

Да припомним, че идеята за състезание от вида на „Европейско кенгуру” възниква през 80-те години на XX век, когато Питър О’Халоран, учител по математика в Сидни, Австралия предлага провеждането да се осъществи не със събиране на дадено място, което ограничава бройката на участниците, а по едно и също време във всички австралийски училища. Тази идея се разраства, състезанието става международно и днес това е известното Австралийско математическо състезание. Двама френски математици Андре Деледик и Жан-Пиер Будин решават да разпространят идеята и във Франция. Така, през 1991 г. възниква математическото състезание „Кенгуру“, известно в България като „Европейско кенгуру”. В първото издание се включват 120 хил. френски ученици. Постепенно бройката на участниците се увеличава: 300 хил. през 1992 г., 500 хил. през 1993 г. Седем държави решават да приложат същата схема. Това са Беларус, Унгария, Холандия, Полша, Румъния, Русия и Испания, които заедно с Франция провеждат състезанието „Кенгуру“ през м. май 1994 г. През всичките тези години състезанието се провежда само на френски език. В България по инициатива на Institute Francais се включват български ученици от гимназиите с изучаване на френски език. Това става през 1995 г. и продължава три години до 1997 г. включително. Попълнените бланки от всички държави се изпращаха във Франция, обработваха се с помощта на компютър е се правеше класиране за цяла Европа. Българското участие беше почти символично. Затова по инициатива на акад. Сава Гроздев и с активното участие на Министерството на образованието и науката, представено от г-жа Паликарска, тогава експерт по френски език в Министерството, беше издаден френско-български речник на основни математически понятия. Речникът беше разпространен в няколко математически гимназии. Особено активни се оказаха учениците от Софийската математическа гимназия. Те ползваха речника и успяха да се справят с френските условия. Нещо повече Младен Димитров, тогава десетокласник в СМГ, стана първенец не само в България, не само в своята възрастова група, а първи измежду всички участници от всички тогава включващи се държави. Това се случи през 1996 г. В момента Младен е професор във Франция. Преди това той завърши престижния колеж Луи льо Гранд и Екол Нормал Супериор. Успехите му се дължат не на последно място на силното му желание да се прояви в „Европейско кенгуру”, да научи френски език и да се подготви за типичните за това състезание задачи.

Още на следващата година, през 1997 г. на Генералната асамблея на Европейската асоциация в Будапеща България беше приета за редовен член на асоциацията. Оттогава до днес изминаха 23 издания на състезанието. През 1997 г. държавите-участнички бяха 21 и България беше една от тях. На асамблеята в Будапеща бяха приети и правилата за участие, които са валидни и до днес. Вече участниците са повече от 6 млн. представители на около 80 държави от Европа, Азия, Америка и Африка. През 2005 г. България беше домакин на 13-ата асамблея и страните-членки на асоциацията бяха 36, за да доближи днешната бройка 80. Възникнало първоначално като европейска инициатива, състезанието „Кенгуру“ разшири географията си и вече претендира за рекорд на Гинес като най-многобройното световно състезание в областта на математиката. То остава уникално с това, че се провежда върху едни и същи задачи, приблизително по едно и също време. Официалните представители на всяка държава участват в годишните генерални асамблеи на регистрираната в Париж Асоциация „Кенгуру без граници” и определят състезателните теми за следващата година. Впоследствие задачите се превеждат на съответните езици и всяка държава организира провеждането на състезанието на своя територия. България е единствената страна, в която учениците могат при желание да се състезават върху френските теми. Така продължаваме традицията от миналото, когато състезанието се провеждаше само на френски език. Броят на участниците в България прогресивно расте, за да се доближи до 45 хил. през миналата и през настоящата 2019 г. И всичко това, въпреки неуспешните опити на агента на Държавна сигурност Петър Кендеров, който като председател на Съюза на математиците се опита да отнеме правата за състезанието на акад. Сава Гроздев. Френският съд отхвърли „тезата” на доносника и даде възможност на „Европейско кенгуру” да се развива по начертания още през 1997 г. път. За съжаление, клеветите и доносите на агента на Държавна сигурност доведоха до това, че всяка година Съюзът на математиците губи по около 100 хил. лв.

Д-р М. Плюс

МЕЖДУНАРОДНИ КОНКУРСИ
ЗА РАЗРАБОТВАНЕ НА ПРОЕКТИ (РЕФЕРАТИ)

(математика, икономика, финанси, счетоводство, застраховане, осигуряване, бизнес)

XIII Международен конкурс MITE’ 2019

Международният проект **MITE** (**M**ethodology and **I**nformation **T**echnologies in **E**ducation – Методика и информационни технологии в образованието) включва два конкурса – единият за ученици, а вторият – за учители. Научната част на проекта има за цел разработването на методики и съвременни информационни технологии в образованието. Партньори по проекта са:

- Висше училище по застраховане и финанси (София, България)
- Московски държавен областен университет (Москва, Русия)
- Сдружение „Европейско кенгуру“

На 7 и 8 февруари 2019 г. във Висшето училище по застраховане и финанси, София, се проведе Националният кръг на конкурса. Участие в събитието взеха ученици и студенти от цялата страна, които представиха свои разработки в областта на икономиката и математиката под научното ръководство на учители и преподаватели от висшите училища. Жури с председател проф. дпн Сава Гроздев (ВУЗФ) и членове доц. д-р Яким Китанов (ВУЗФ), доц. д-р Любка Ценова (ВУЗФ), доц. д-р Боян Жеков (ВУЗФ), д-р Александър Ахегукян (ВУЗФ), доц. д-р Бойко Банчев (ИМИ-БАН) и доц. д-р Веселин Ненков (ВВМУ, Варна) оцени разработките в задочния кръг и по време на националния кръг на конкурса и направи съответното класиране. За първи път тази година в задочния кръг взе участие проект от Румъния – „Математически цифри в историята“ с автор Чиприана Ткач – ученичка от 11 клас, Колеж „Францийй Бузешть“, Крайова, който получи висока оценка от научното жури. Националният кръг завърши с тържество, на което бяха връчени дипломи на победителите.

Спазена беше традицията разработката, направила, най-силно впечатление на журито и събрала най-много точки при оценяването (предварително в задочния кръг и по време на презентациите по програмата на националния кръг), да се награждава със специална награда (самолетен билет), подпомагаща автора ѝ за участие в международния етап на конкурса в Москва. Тази година специална награда заслужиха две разработки.

Класиране на представените проекти:

Специалната награда бе присъдена на разработките:

- Cardfight – Игра с карти
  Автори: Ангел Карчев и Христо Христов, 12 клас, МГ „Д-р Петър Берон“, Варна
  Научен ръководител: Елена Димитрова

- Обобщения на конфигурации с бутони и връзки с числата на Бел
  Автор: Демира Недева, 6 клас, МГ"Акад. Кирил Попов", Пловдив

1 място в съответните направления беше присъдено на:

- Интелект на масите
  Автори: Моника Великова, 11 клас, МГ „Баба Тонка", Русе
  Селин Шемсиева, 12 клас, МГ „Баба Тонка", Русе
  Научен ръководител: Сюзан Феимова
- История на логическите игри
  Автори: Диляна Дойчева, 10 клас, МГ „Баба Тонка", Русе
  Велислава Крумова, 10 клас, МГ „Баба Тонка", Русе
  Научен ръководител: Сюзан Феимова
- Стартъпи в сферата на роботиката
  Автор: Боримир Велков, студент 2 курс, ВУЗФ, София
  Научни ръководители: проф. д-р Румен Трифонов
  доц. д-р Боян Жеков
- Основни методи в комбинаториката
  Автор: Иван Найденов, студент, ПУ „Паисий Хилендарски", Пловдив
  Научен ръководител: гл. ас. д-р Петър Копанов
- Система за адаптация към климатичните промени
  Автори: Моника Великова, 11 клас, МГ „Баба Тонка", Русе
  Селин Шемсиева, 12 клас, МГ „Баба Тонка", Русе
  Научен ръководител: Сюзан Феимова
- Геометрични места, породени от равностранни триъгълници с върхове върху окръжност
  Автори: Николай Нинов, 11 клас, ППМГ, Ловеч
  Теодор Христов, 11 клас, ППМГ, Ловеч
  Деян Димитров, 11 клас, ППМГ, Ловеч
  Борислав Борисов, 12 клас, ППМГ, Ловеч
  Научен ръководител: доц. д-р Веселин Ненков
- 3 D образователна игра за изучаване на ноти „3 D Music"
  Автор: Мария Кирилова, 8 клас, МГ „Баба Тонка", Русе
  Научен ръководител: Сюзан Феимова
- Колекция от класически игри
  Автори: Иван Петров, 10 клас, МГ „Баба Тонка", Русе
  Ерик Николов, 10 клас, МГ „Баба Тонка", Русе
  Научен ръководител: Сюзан Феимова

2 място в съответните направления беше присъдено на:

- Кредитни и депозитни инструменти в бизнеса
  Автори: Симона Неделчева, 11 клас, НФСГ, София
  Мария Любенова, 11 клас, НФСГ, София
  Научен ръководител: Станимира Петрушкова

- Геометрични фигури
  Автор: Ростислав Гордеев, 8 клас, МГ „Баба Тонка“, Русе
  Научен ръководител: Сюзан Феимова
- Стивън Хокинг срещу Алберт Айнщайн
  Автори: Богдан Богданов, 7 клас, ОУ „Васил Левски“, Разград
  Артур Инов, 7 клас, ОУ „Васил Левски“, Разград
  Научен ръководител: инж. Коста Попов
- Полином Калк
  Автор: Никола Йорданов, Профилирана гимназия „Христо Ботев“, Дупница

3 място в съответните направления беше присъдено на:

- Политика за защита на личните данни
  Автор: Десислава Маркова, студентка 2 курс, ВУЗФ, София
  Научни ръководители: проф. д-р Румен Трифонов
  доц. д-р Боян Жеков
- Произход на банката
  Автор: Велиана Ганчева, 12 клас, СУ „Димитър Матевски“, Пловдив
  Научен ръководител: Таня Петкова-Даскалова
- История на десетичната бройна система
  Автор: Джани Папазов, 12 клас, СУ „Димитър Матевски“, Пловдив
  Научен ръководител: Таня Петкова-Даскалова

Финалният кръг на XIII Международен конкурс MITE' 2019 се проведе в периода 1 – 5 май 2019 г. в Москва, Московски държавен областен университет. Участие в международния етап в Москва взеха над 220 ученици и учители от Русия, България, Казахстан и Румъния. Жури под съпредседателството на проф. дпн Татяна Сергеева (МГОУ, Русия) и проф. дпн Сава Гроздев (ВУЗФ, България), с участието на известни учени и преподаватели от редица български и руски университети и институти изслуша и оцени презентациите на участниците, докладвани в девет ученически, една студентска и една учителска секции. На вниманието на журито в секции „Мрежови проекти“ бяха представени три международни мрежови проекта с участие на ученици от България, Русия и Казахстан. Състезанието „Математическа вселена“ по време на втория състезателен ден по отбори, всеки от които беше съставен от представители на различни държави, предизвика много емоции и показа високите умения на участниците. Богатата културна програма, която предложиха организаторите – посещение на телевизионната кула „Останкино“ и екскурзия в имението-музей „Кусково“, предизвика голям интерес и остави незабравими спомени.

България постигна забележителен успех! Българските представители от градовете София, Пловдив, Варна, Разград и Ловеч, излъчени по време на националния етап на конкурса, докладваха общо 10 проекта и завоюваха 6 златни, 3 сребърни и 1 бронзов медала.

Ето българското участие:

Обобщения на конфигурации с бутони и връзки с числата на Бел (Демира Недева)
Направление „Наука математика”

История на логическите игри (Диляна Дойчева, Велислава Крумова)

Направление „История математики”

Колекция от класически игри (Иван Петров, Ерик Николов)
Направление „Электронный тематический журнал”

Интелект на масите (Моника Великова, Селин Шемсиева)
Направление „Использование математических методов для решения профессионально-ориентированных задач”

3D образователна игра за изучаване на ноти „3D Music“ (Мария Кирилова)
Направление „Математика и искусство”

Стивън Хокинг срещу Алберт Айнщайн (Богдан Богданов, Артур Инов)
Направление „История математики”

Cardfight – Игра с карти (Ангел Карчев, Христо Христов)
Направление „Математические модели реальных процессов в природе и обществе”

Геометрични места, породени от равностранни триъгълници с върхове върху окръжност (Николай Нинов, Теодор Христов, Деян Димитров, Борислав Борисов)
Направление „Геометрические миниатюры”

Основни методи в комбинаториката (Иван Найденов)
Направление „Математика в профессиональной деятельности (для студентов)”

Политика за защита на личните данни (Десислава Маркова)
Направление „Математика в профессиональной деятельности (для студентов)”

Със сребърни медали бяха отличени двама български участници в мрежовите проекти. В състезанието „Математическа вселена“ участваха общо осем отбора и заелите първите три места включваха шестима български представители, които завоюваха 2 златни, 2 сребърни и 2 бронзови медала.

Десислава Маркова, студентка във ВУЗФ, 2 курс, специалност „Бизнес психология и човешки ресурси”, завоюва златен медал в студентската секция със своя проект на тема „Политика за защита на личните данни”.

ЧЕСТИТО!

СЪСТЕЗАНИЯ + СЪСТЕЗАТЕЛИ

INSTITUT DES HAUTES ETUDES POUR LE DEVELOPPEMENT DE LA CULTURE, DE LA SCIENCE ET DE LA TECHNOLOGIE EN BULGARIE

http://balkanski-foundation.org/

*Всяка година през м. май **Институтът за висши изследвания, за развитие на културата, науката и технологиите в България** провежда конкурса „Минко Балкански”. Лауреатите от конкурса получават възможност да продължат образованието си в едни от най-престижните училища и университети във Франция. Не е задължително един ученик да може да си служи с френски език. Конкурсът дава възможност да се участва с описание на решенията и на английски език. При това, както ще стане ясно от обясненията по-долу, разрешено е ползването на речници. Предлагаме ви задачите и техните решения от тазгодишния конкурс. Следващите указания се отнасят до учениците, които участваха в него.*

Част първа и част втора съдържат условията на задачите съответно на френски и английски език. Единствените външни документи, на които имате право, са френски и английски речници. Ако желаете, можете да ползвате калкулатори.

При оценяването на задачите голяма тежест ще имат **яснотата и стилът** на изложените решения, както и аргументацията. Не използвайте излишна проза в аргументите си, бъдете точни и кратки. Използването на схеми за онагледяване на разсъжденията Ви е желателно.

Пишете само на езика, който сте избрали (френски или английски)!

Задачите носят еднакъв брой точки.

При намиране на грешка в условията на задачите отбележете я в работата си и продължете **без да повдигате въпроси към квесторите**.

Класирането ще бъде изложено на сайта http://balkanski-foundation.org/.

Ако имате въпроси и коментари, можете да ги насочите към svilen.iskrov@gmail.com}. С първенците ще се свържем чрез e-mail или по телефон. Попълнете правилно информацията за контакт.

Разполагате с **4 часа**. Успех!

1 Français

Problème I

Dans un bâtiment il y a $n+1$ étages numérotés de 0 à n. A l'étage i il y a i personnes attendant l'ascenseur, qui se trouve initialement à l'étage 0. L'ascenseur a une capacité de 5 personnes. Il prend 2 secondes pour monter ou descendre d'un étage et 8 secondes pour ouvrir et fermer ses portes. Proposer une procédure minimisant le temps nécessaire aux gens pour descendre tous à l'étage 0 pour :

a. $n = 101$;

b. $n = 100$.

Dans les deux cas il n'est pas demandé de calculer explicitement le temps minimal, même si c'est possible.

Problème II

Deux cercles k_1 et k_2 de centres O_1 et O_2 respectivement s'intersectent en deux points distincts A et B. La droite O_1B intersecte k_2 au point C distinct de B. La droite O_2B intersecte k_1 au point D distinct de B. Les tangentes à k_1 au point D et à k_2 au point C s'intersectent en F. Montrer que les points F, B et le centre I du cercle circonscrit k du triangle ACD sont collineaires.

Problème III

Soit $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$. On considère les fonctions $f: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ telles que pour tous m, n, k dans $\mathbb{N}$ on ait

$$f(m+n^k) | f(m) + f(n)^{f(k)}.$$

a. Trouver toutes les solutions f non-décroissantes.

b. On dit que deux fonctions f, g sont équivalentes s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m \geq n$ on a $f(m) = g(m)$. Trouver à équivalence près toutes les solutions f avec $f(1) = 1$.

——— **FIN DE L'ENONCE** ———

2 English

Problem I

In a building there are $n+1$ floors numbered from 0 to n. On floor number i, there are i people waiting for the elevator that is initially on the 0-th floor. The elevator's capacity is 5 people at a time. It takes two seconds for the elevator to go one floor up or down and it takes eight seconds to open and close its doors. Give a procedure minimising the time needed for all people to reach the ground floor for

a. $n = 101$;

b. $n = 100$.

In both cases it is not asked to compute explicitly the minimal time, even if it is possible.

Problem II

Two circles k_1 and k_2 with centres O_1 and O_2 respectively intersect at two different points A and B. The line O_1B intersects k_2 at point C different from B. The line O_2B intersects k_1 at point D different from B. The tangents to k_1 at D and to k_2 at C intersect at F. Prove that the points F, B and the center I of the circumcircle k of triangle ACD are collinear.

Problem III

Let $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$. Consider functions $f: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ such that for any triple of positive integers (m, n, k) we have

$$f(m + n^k) | f(m) + f(n)^{f(k)}.$$

a. Determine all such non-decreasing functions f.

b. We say that two functions f, g are equivalent if there exists $n \in \mathbb{N}$ such that for all $m \geq n$ we have $f(m) = g(m)$. Determine up to equivalence all solutions f for which $f(1) = 1$.

——— **END OF PAPER** ———

Concours Général de Mathétmatiques "Minko Balkanski"

Solutions

18 May 2019

Solution 1.

a. Let $n = 101$. We begin by giving a lower bound for the minimal time of evacuation and then construct an algorithm attaining it. Consider floor number i. The number of people waiting for the elevator on a higher floor is initially

$$\sum_{s=i+1}^{101} s = \frac{101.102}{2} - \frac{i.(i+1)}{2} = \frac{(101-i)(102+i)}{2}. \qquad (1)$$

Thus, the number of times the elevator has to go up to take people from floors $i+1$, $i+2$ ... up to 101 is

$$\left\lceil \frac{(101-i)(102+i)}{10} \right\rceil. \qquad (2)$$

To obtain a lower bound for the time the elevator spends moving between the floors, we sum (2) from $i = 0$ to $i = 100$ and multiply by four seconds (two for going up and two for going down). In order to bound the time spent waiting on floors, notice that the elevator has to wait at least $8\left\lceil \frac{i}{5} \right\rceil$ seconds on the floor number i.

We will give an example meeting both bounds, so having a total evacuation time

$$4\sum_{i=0}^{100} \left\lceil \frac{(101-i)(102+i)}{10} \right\rceil + 8\sum_{i=1}^{101} \left\lceil \frac{i}{5} \right\rceil = 287572$$

seconds or 79 hours, 52 minutes and 52 seconds. To achieve this, one can perform the following procedure.

- Bring down 5 people from a floor as long as possible (in any order). After this on floor i the number of people left is the remainder of i modulo 5.
- Bring down the remaining people 5 by 5 by pairing successive non-empty floors together – $5k+6$ with $5k+4$, $5k+3$ with $5k+2$ for $0 \leq k \leq 19$.
- Bring down the only person on the first floor.

The elevator stops the minimal number of times, $\left\lceil \frac{i}{5} \right\rceil$, on floor i in order to collect all the people. In order to treat the travelling time, we prove that that for each floor $i \leq 100$ the distance between floors i and $i+1$ is run the minimal number of times. Notice that for each such link between floors the number of ascends is equal to the number of descents, as the elevator starts and finishes at floor 0. Moreover, each link is travelled downwards exactly the number of times in (2) (check this separately for floor numbers with different remainders modulo 5).

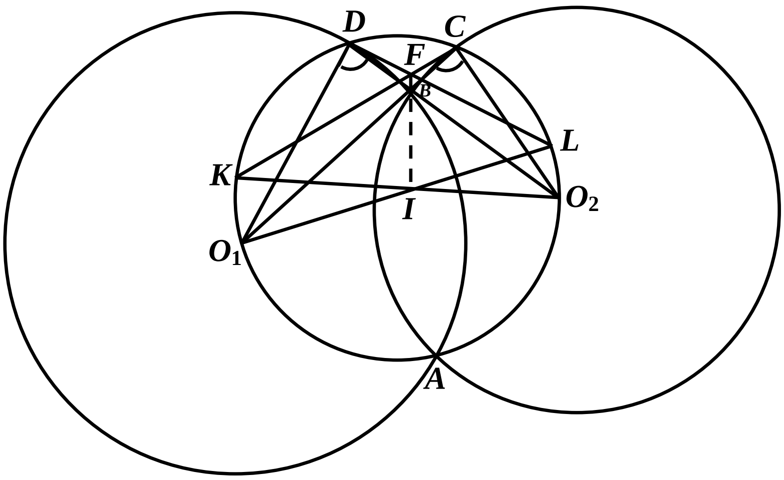
b. For $n = 100$, we repeat a similar algorithm, whose correctness is proved by the same method (the verification for the travelling time is slightly different). The modified algorithm is as follows.

- Bring down 5 people from a floor as long as possible (in any order). After this on floor i the number of people left is the remainder of i modulo 5.

- Bring down the remaining people 5 by 5 by pairing non-empty floors together – $5k+4$ with $5k+1$, $5k+3$ with $5k+2$ for $0 \leq k \leq 19$.

The time is 2 hours, 20 minutes and 12 seconds less.

Solution 2.



First notice that $\angle O_1CO_2 = \angle O_1DO_2 = 180^\circ - \angle O_1BO_2 = 180^\circ - \angle O_1AO_2$. From this observation we get that O_1, O_2, A, C and D lie on a common circle. Let the line DF intersect this circle at L, different from D, and also let the line CF intersect this circle at K, different from C. We have that O_1L and O_2K are diameters in k and thus intersect at I. We conclude from Pascal's theorem for the circle k and the triplets of points D, K, O_1 and C, L, O_2.

Solution 3.

a. First notice that constant functions are solutions. Assume that the function is non-constant. Plugging $n = 1$ in the relation, one obtains

$$\forall m, k \in \mathbb{N}, f(m+1) | f(m) + f(1)^{f(k)}.$$

We consider two cases.

Case 1. Assume that $f(1) > 1$. Then the statement above gives

$$\forall m, k, s \in \mathbb{N}, f(m+1) | f(1)^{f(s)} - f(1)^{f(k)}.$$

As f is not constant, it follows that for s, k such that $f(s) \neq f(k)$, $f(m+1) | f(1)^{f(s)} - f(1)^{f(k)}$ and in particular f is bounded. Then for any N large enough, $f(m+N^k) = f(N) = \max f$. But the divisibility condition for $n = N$ and any m, k gives in this case that $\max(f) | f(m)$. In consequence, f must be a constant function, which was already treated.

Case 2. Assume that $f(1) = 1$. Let $a = \min\{n \in \mathbb{N} | f(n) > 1\}$. The divisibility condition for $m = k = 1$ and $n = a - 1$ gives that $f(a) = 2$. Now, $f(a+1) | f(a) + f(1) = 3$ and if $a \geq 3$, we also have $f(a+1) | f(2) + f(a-1) = 2$. This imposes $f(a+1) = 1$, contradiction with the assumption that f is non-decreasing. So $a = 2$ and $f(2) = 2$. An easy induction is sufficient to conclude that in this case we obtain the identity function, which is indeed a solution of the problem.

b. Setting $k = 1$ in the divisibility condition, we obtain that

$$f(m+n) | f(m) + f(n). \tag{3}$$

By induction one obtains $f(n) \leq n$ for all n. We consider two cases.

Case 1. Assume that $f(2) = 1$. Let $a = \min\{n \in \mathbb{N} | f(n) > 1\} > 2$, as above. As in **a.** one obtains that $f(a) = 2$. Then, as in **a.**, by induction $f(n) = 1$ for all n not divisible by a and $f(n)|2$ for all n divisible by a. Indeed, by (3) we have $f(n)|f(a) + f(n-a)$ and $f(n)|f(\alpha) + f(n-\alpha)$ for $\alpha < a$ with a $n - \alpha$ and the two $\nmid$ sums can be computed by induction hypothesis.

Note that if $f(la) = 1$ for some l, then $f(n) = 1$ for all $n \geq la$, since $f(ma)|f(a) + f((m-1)a) = 3$ by induction and we already know that $f(ma)|2$, so f is equivalent to the constant function 1 and we are done. But the only other possibility is to have $f(n) = 2$ if $a|n$ and 1 otherwise. We claim that this is possible if and only if $a = \prod p_i$ for distinct primes p_i. To see that those are solutions, note that $a|m + n^k$ implies that for all i we have m and n are either both divisible or both not divisible by p_i. Thus, $f(m + n^k) = 2$ implies that $f(m) = f(n)$ and the desired divisibility holds. Hence,

$$f(n) = 2 \text{ if } a|n \text{ and } 1 \text{ otherwise with } a = \prod p_i \text{ for } p_i \text{ distinct primes}$$

is a solution. Assume that $p^2|a$ for some prime p. Then $2 = f(a + (a/p)^2) = f(a) + f(a/p)^{f(2)} = 3$ – a contradiction.

Case 2. Assume that $f(2) = 2$. Let $n_k = \min\{n > n_{k-1} | f(n_k) = 1\}$ with $n_1 = 1$.

Note that if for some k we have $n_k - n_{k-1} = 1$, then $f(n) = 1$ for all $n \geq n_{k-1}$, which is equivalent to the constant 1. Assume that $n_k - n_{k-1} \geq 2$ for all k. If $n_k - n_{k-1} = 2$ for some k, then $f(n_k - 2) = 1 = f(n_k)$, $f(n_k - 1) = 2 = f(n_k + 1)$ and $f(n_k + 2) = f((n_k - 2) + 2^2) = f((n_k + 1) + 1)$ divides 5 and 3, so $n_{k+1} - n_k = 2$. By induction the sequence alternates between 1 and 2. In **Case 1.** we already saw that the function equal to 2 on even integers and 1 on odd ones is a solution. We claim that it is not possible to have the opposite parity for all sufficiently large n. Indeed, (3) is contradicted by taking $m = n + 1$ sufficiently large.

Hence, we can assume that $n_k - n_{k-1} \geq 3$ for all k and aim for a contradiction. Let

$$m_k = \min\{m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} | m > n_k, f(m) < m - n_k + 1\}$$

and note that $f(m) < m - n_k + 1$ for all $m \geq m_k$ and $f(m) = m - n_k + 1$ for all $n_k \leq m < m_k$ by (3). Further set $b_k = m_k - n_k \geq 3$ (since $n_{k+1} - n_k \geq 3$). We also assume that f is not the identity function, so m_1 is finite.

We next prove by induction that $b_{k+1} < b_k$ (and n_{k+1} and m_{k+1} are finite). Assume that this is true for all $k < k_0$. By Bertrand's postulate[1] there exists a prime $b_{k_0} < p < 2b_{k_0}$, where $b_{k_0} = m_{k_0} - n_{k_0}$. But by (3) and the definitions of m_{k_0} and b_{k_0} we have

$$f(p + n_{k_0} - 1) | f(m_{k_0} - 1) + f(p - b_{k_0}) = b_{k_0} + (p - b_{k_0}) = p,$$

since $p - b_{k_0} < b_{k_0} \leq b_1 < m_1$. Since $f(m) < m - n_{k_0} + 1$ for $m \geq m_{k_0}$, we have $f(p + n_{k_0} - 1) = 1$, so $n_{k_0+1} \leq p$. Assume for a contradiction that $m_{k_0+1} > n_{k_0+1} + b_{k_0}$. Fix some $m \leq b_{k_0}$ and let $n_{k_0} \leq \alpha < m_{k_0}$ and $\beta \leq b_1$ be such that $n_k + m = \alpha + \beta^2$. This is indeed possible, since $b_{k_0} + n_{k_0+1} - m_{b_{k_0}} \leq 2b_{k_0}$, so that $2\left\lfloor\sqrt{b_{k_0} + n_{k_0+1} - m_{b_{k_0}}}\right\rfloor \leq b_{k_0}$. Hence,

[1] Other facts on the distribution of primes can be used, but we focus on this one, since it is among the most widely-known.

$$m + 1 = f(n_{k_n+1} + m) | f(\alpha) + f(\beta)^2 = n_{k_n+1} - n_{k_n} + m + 1,$$

so $n_{k_0+1} - n_{k_0} < 2b_{k_0}$ is divisible by all integers smaller than b_{k_0}. This is not possible for $b_{k_0} \geq 3$ (e.g. using Bertrand's postulate). Hence, b_k form a decreasing sequence which contradicts $b_k \geq 3$. Thus, there are no other solutions.

===

Concours Général de Mathétmatiques "Minko Balkanski"

Solutions

18 mai 2019

Solution 1.

a. Soit $n = 101$. On commence par donner une borne inférieure du temps d'évacuation et on donne un algorithm, qui l'atteint. Considérons l'étage numéro i. Le nombre de gens, qui attendent l'ascenseur à un étage supérieur est initialement

$$\sum_{s=i+1}^{101} s = \frac{101.102}{2} - \frac{i.(i+1)}{2} = \frac{(101-i)(102+i)}{2}. \tag{4}$$

Ainsi, le nombre de fois que l'ascenseur doit monter plus haut que l'étage i pour prendre ces personnes est

$$\left\lceil \frac{(101-i)(102+i)}{10} \right\rceil. \tag{5}$$

Pour obtenir une borne inférieure du temps que l'ascenseur met à monter ou descendre entre étages, on somme (5) de $i = 0$ à $i = 100$ et multiplie par quatre secondes (deux pour la montée et deux pour la descente). Pour borner le temps passé aux étages, notons que l'ascenseur attend au moins $8\left\lceil \frac{i}{5} \right\rceil$ secondes à l'étage i.

Donnons un exemple saturant les deux bornes et donc ayant temps d'évacuation total

$$4\sum_{i=0}^{100} \left\lceil \frac{(101-i)(102+i)}{10} \right\rceil + 8\sum_{i=1}^{101} \left\lceil \frac{i}{5} \right\rceil = 287572$$

secondes, soit 79 heures, 52 minutes et 52 secondes. Pour ce faire, on exécute la procédure suivante.

- On fait descendre 5 personnes de chaque étage tant que c'est possible (dans un ordre arbitraire). A ce moment à l'étage i il reste un nombre de personnes égal au reste de i modulo 5.
- On fait descendre les gens restant 5 par 5, en appariant les étages non-vides successives – $5k + 6$ avec $5k + 4$, $5k + 3$ avec $5k + 2$ pour $0 \leq k \leq 19$.
- On fait descendre l'unique personne du première étage.

L'ascenseur s'arrête bien le nombre minimal de fois, $\left\lceil \frac{i}{5} \right\rceil$, à l'étage i pour prendre les gens à cet étage. Pour traiter le temps de montée et descente, on montre que pour chaque étage $i \leq 100$ la distance entre étages i et $i+1$ est parcourue le nombre minimal de fois. Notons que pour chaque tel lien entre étages le nombre de montées et descentes est égal, comme l'ascenseur termine à l'étage 0. De plus, chaque lien est parcouru exactement le nombre de fois dans (5) (on le vérifie séparement pour les étages de numéro avec un reste different modulo 5).

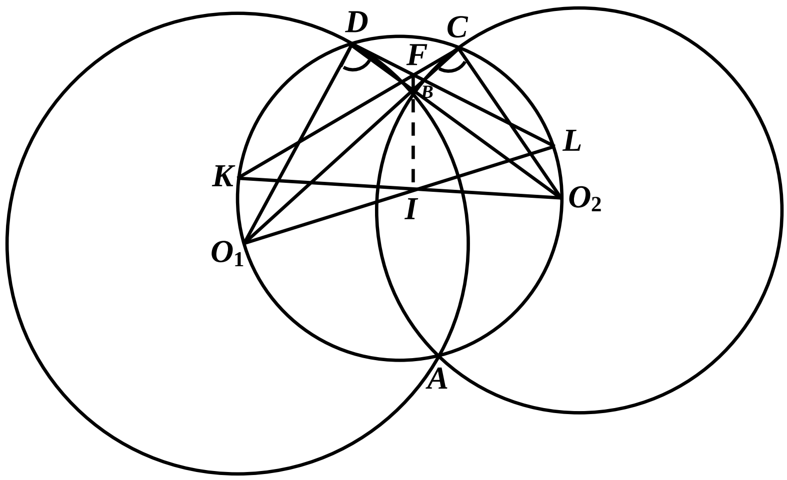
b. Pour $n = 100$ on répète un algorithme similaire dont l'exactitude est montrée par la même méthode (la vérification pour le temps de montée/descente diffère légèrement). L'algorithme modifié est comme suit.

- On fait descendre 5 personnes de chaque étage tant que c'est possible (dans un ordre arbitraire). A ce moment à létage i il reste un nombre de personnes égal au reste de i modulo 5.

- On fait descendre les gens restant 5 par 5, en appariant les étages non-vides successives – $5k+4$ avec $5k+1$, $5k+3$ avec $5k+2$ pour $0 \leq k \leq 19$.

Le temps d'exécution est 2 heures, 20 minutes et 12 secondes de moins.

Solution 2.



Notons d'abord que $\angle O_1CO_2 = \angle O_1DO_2 = 180° - \angle O_1BO_2 = 180° - \angle O_1AO_2$. On en déduit que O_1, O_2, A, C et D sont cocycliques. Soit L le point d'intersection de ce cercle avec la droite DF, distinct de D, et soit K le point d'intersection du même cercle avec la droite CF, distinct de C. On a que O_1L et O_2K sont des diametres dans k et donc s'intersectent au point I. On conclut par le théorème de Pascal pour le cercle k et les triplets de points D, K, O_1 et C, L, O_2.

Solution 3.

a. Notons d'abord que les fonctions constantes sont des solutions. Supposons que la fonction est non-constante. En injectant $n = 1$ dans la relation, on obtient

$$\forall m, k \in \mathbb{N}, f(m+1) | f(m) + f(1)^{f(k)}.$$

Considérons deux cas.

Cas 1. Supposons que $f(1) > 1$. Alors ce qui précède donne

$$\forall m, k, s \in \mathbb{N}, f(m+1) | f(1)^{f(s)} - f(1)^{f(k)}.$$

Puisque f n'est pas constante, il s'ensuit que pour s, k tels que $f(s) \neq f(k)$, on a $f(m+1)|f(1)^{f(s)} - f(1)^{f(k)}$ et, en particulier, f est bornée. Alors pour N assez grand, $f(m+N^k) = f(N) = \max f$. Mais la condition de divisibilité pour $n = N$ et m, k arbitraires donne dans ce cas $\max(f)|(f(m))$. Par conséquent, f doit être une fonction constante, ce qui a été déjà traité.

Cas 2. Supposons que $f(1) = 1$. Soit $a = \min\{n \in \mathbb{N} | f(n) > 1\}$. La condition de divisibilité pour $m = k = 1$ et $n = a - 1$ donne $f(a) = 2$. Alors $f(a+1)|f(a) + f(1) = 3 = 3$ et si $a \geq 3$, on a aussi $f(a+1)|f(2) + f(a-1) = 2$. Cela impose $f(a+1) = 1$ – contradiction avec l'hypothèse que f est non-décroissante. Ainsi $a = 2$ et $f(2) = 2$. Une récurrence immédiate suffit pour conclure que dans ce cas on obtient la fonction identité, qui est bien solution du problème.

b. En injectant $k = 1$ dans la condition de divisibilité on, obtient

$$f(m+n)|f(m) + f(n). \tag{6}$$

Par récurrence cela donne $f(n) \leq n$ pour tout *n*. On considère de nouveau deux cas.

Cas 1. Supposons que $f(2) = 1$. Soit $a = \min\{n \in \mathbb{N} | f(n) > 1\} > 2$ comme ci-dessus. Comme dans **a.** on obtient $f(a) = 2$. Alors comme dans **a.**, par récurrence $f(n) = 1$ pour tout n non-divisible par a et $f(n)|2$ pour tout n divisible par a. En effet, par (6) on a $f(n)|f(a) + f(n-a)$ et $f(n)|f(\alpha) + f(n-\alpha)$ pour $\nmid$ $\alpha < a$ avec *a* $n - \alpha$ et les deux sommes peuvent être calculées à l'aide de l'hypothèse de récurrence.

Notons que $f(la) = 1$ pour un certain l, alors $f(n) = 1$ pour tout $n \geq la$, puisque $f(ma)|f(a) + f((m-1)a) = 3$ par récurrence et on sait que $f(mn)|2$. Ainsi f est équivalente à la fonction constante 1 et on a fini. La seule autre possibilité est d'avoir $f(n) = 2$ si $a|n$ et 1 sinon. On va monter que c'est une solution uniquement si $a = \prod p_i$ pour des nombres premiers distincts p_i. Pour voir que a de cette forme donne bien une solution, notons que $a|m + n^k$ implique que pour tout i on a que m et n sont soit tous deux divisibles par p_i, soit tous deux non-divisibles. Alors $f(m+n^k) = 2$ implique $f(m) = f(n)$ et la condition de divisibilité souhaitée est établie. Ainsi,

$$f(n) = 2 \text{ si } a|n \text{ et } 1 \text{ sinon avec } a = \prod p_i \text{ pour } p_i \text{ premiers distincts}$$

est bien une solution. Supposons que $p^2|a$ pour un nombre premier p. Alors $2 = f(a + (a/p)^2) = f(a) + f(a/p)^{f(2)} = 3$ – contradiction.

Cas 2. Supposons que $f(2) = 2$. Soit $n_k = \min\{n > n_{k-1} | f(n_k) = 1\}$ avec $n_1 = 1$.

Notons que si pour un certain k on a $n_k - n_{k-1} = 1$, alors $f(n) = 1$ pour tout $n \geq n_{k-1}$, ce qui est équivalent à la constante 1. Supposons que $n_k - n_{k-1} \geq 2$ pour tout k. Si $n_k - n_{k-1} = 2$ pour un k, alors $f(n_k - 2) = 1 = f(n_k)$, $f(n_k - 1) = 2 = f(n_k + 1)$ et $f(n_k + 2) = f((n_k - 2) + 2^2) = f((n_k + 1) + 1)$ divise 5 et 3, de sorte que $n_{k+1} - n_k = 2$.

Par récurrence la suite alterne entre 1 et 2. Dans **Cas 1.** on a vu que la fonction égale à 2 sur les entiers pairs et 1 sur les impairs est une solution. La parité opposée n'est pas admissible pour tout n assez grand. En effet, (6) est contredit pour $m = n + 1$ asseez grand.

Ainsi on peut supposer $n_k - n_{k-1} \geq 3$ pour tout k et chercher une contradiction. Soit

$$m_k = \min\{m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} | m > n_k, f(m) < m - n_k + 1\}$$

et notons que $f(m) < m - n_k + 1$ pour tout $m \geq m_k$ et $f(m) = m - n_k + 1$ pour tout $n_k \leq m < m_k$ par (6). Posons aussi $b_k = m_k - n_k \geq 3$ (puisque $n_{k+1} - n_k \geq 3$). Supposons de plus que f n'est pas l'identité, de sorte que m_1 soit fini.

Montrons par récurrence que $b_{k+1} < b_k$ (et n_{k+1} et m_{k+1} sont finis). Supposons que cela vaut pour tout $k < k_0$. Par le postulate de Bertrand[2] il existe un nombre premier $b_{k_0} < p < 2b_{k_0}$, où $b_{k_0} = m_{k_0} - n_{k_0}$. Mais par (6) et les définitions de m_{k_0} et b_{k_0} on a

$$f(p + n_{k_0} - 1) | f(m_{k_0} - 1) + f(p - b_{k_0}) = b_{k_0} + (p - b_{k_0}) = p,$$

since $p - b_{k_0} < b_{k_0} \leq b_1 < m_1$. Since $f(m) < m - n_{k_0} + 1$ for $m \geq m_{k_0}$, we have $f(p + n_{k_0} - 1) = 1$, so $n_{k_0+1} \leq p$. Assume for a contradiction that $m_{k_0+1} > n_{k_0+1} + b_{k_0}$. Fix some $m \leq b_{k_0}$ and let $n_{k_0} \leq \alpha < m_{k_0}$ and $\beta \leq b_1$ be such that $n_k + m = \alpha + \beta^2$. This is indeed possible, since $b_{k_0} + n_{k_0+1} - m_{b_{k_0}} \leq 2b_{k_0}$, so that $2\left[\sqrt{b_{k_0} + n_{k_0+1} - m_{b_{k_0}}}\right] \leq b_{k_0}$. Hence,

$$m + 1 = f(n_{k_0+1} + m) | f(\alpha) + f(\beta)^2 = n_{k_0+1} - n_{k_0} + m + 1,$$

so $n_{k_0+1} - n_{k_0} < 2b_{k_0}$ is divisible by all integers smaller than b_{k_0}. This is not possible for $b_{k_0} \geq 3$ (e.g. using Bertrand's postulate). Hence, b_k form a decreasing sequence which contradicts $b_k \geq 3$. Thus, there are no other solutions.

$$f(p + n_{k_0} - 1) | f(m_{k_0} - 1) + f(p - b_{k_0}) = b_{k_0} + (p - b_{k_0}) = p,$$

car $p - b_{k_0} < b_{k_0} \leq b_1 < m_1$. Puisque $f(m) < m - n_{k_0} + 1$ pour $m \geq m_{k_0}$, on a $f(p + n_{k_0} - 1) = 1$ et donc $n_{k_0+1} \leq p$. Supposons pour une contradiction que $m_{k_0+1} > n_{k_0+1} + b_{k_0}$. Fixons $m \leq b_{k_0}$ et soient $n_{k_0} \leq \alpha < m_{k_0}$ et $\beta \leq b_1$ tels que $n_k + m = \alpha + \beta^2$. Cela est possible, car $b_{k_0} + n_{k_0+1} - m_{b_{k_0}} \leq 2b_{k_0}$, donc $2\left[\sqrt{b_{k_0} + n_{k_0+1} - m_{b_{k_0}}}\right] \leq b_{k_0}$. Alors

$$m + 1 = f(n_{k_0+1} + m) | f(\alpha) + f(\beta)^2 = n_{k_0+1} - n_{k_0} + m + 1,$$

donc $n_{k_0+1} - n_{k_0} < 2b_{k_0}$ est divisible par tous les entiers inférieures à b_{k_0}. Cela n'est pas possible pour $b_k \geq 3$ (par exemple par le postulate de Bertrand). Ainsi, b_k forment une suite décroissante, ce qui contredit $b_k \geq 3$. Il n'y a donc pas d'autres solutions.

[2] D'autres faits sur la distribution des nombres premiers peuvent être évoqués, mais on se contente de celui-ci, comme il est parmi les plus connus.

$\overset{?}{1 = 4}$ **M+** **ЕДНА ЗАДАЧА + МНОГО РЕШЕНИЯ**

ЗАДАЧА НА ОЙЛЕР

ПО ПОВОД НА ЕДНА ЗАДАЧА

д-р Хари Алексиев

Водено от желанието да бъде полезно на ученици, учители и студенти, списанието предлага на своите читатели рубриката "Една задача + много решения", която включва най-разнообразни задачи: урочни, олимпиадни, конкурсни. Целта е да бъде разкрита историята на съответната задача, да се разбере как тя е била замислена, да се осъзнае идеята за нейното съставяне и да се осъществи докосване до потенциала на възможните ѝ приложения. Един от начините за това е чрез намиране на различни решения. Търсенето на поне едно решение се превръща в "мисловен алпинизъм", заради неусетната поява на желание за откриване на повече решения.

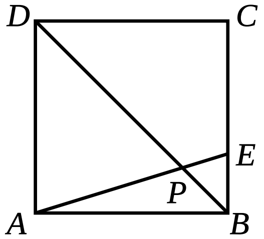
Искрено се надяваме, че подобно предизвикателство ще мотивира читателя за активна самостоятелна работа и той ще се включи в рубриката със свои предложения.

Очакваме писмата Ви на адреса на редакцията до д-р Хари Алексиев, който води рубриката.

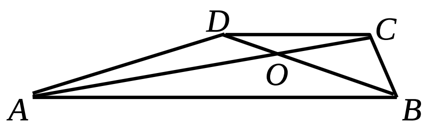
Пожелаваме Ви приятни занимания!

Настоящата бележка е посветена на следната:

Основна задача. Даден е квадрат $ABCD$ със страна 4 и точка E от страната BC така, че $BE = 1$. Ако $P = AE \cap BD$, да се намери лицето на ΔDAP.



Ясно е, че една задача за даден клас е достъпна за учениците от по-горните класове, защото е свързана със знанията на по-малките ученици. Интересен е обратният въпрос – например, дали една задача за шести клас може да се реши и със знанията на ученик от пети клас. Отговорът не е категоричен, но понякога се оказва, че е положителен. Ще използваме формулираната по-горе основна задача и ще предложим 8 решения, подходящи за знанията на ученици от различни класове, започвайки от пети клас. За целта ще припомним два факта за трапец. Нека $ABCD$ е трапец и O е пресечната точка на диагоналите му. Ще използваме едно по-различно означение за лице. Например лицето на един ΔABC ще означаваме с $[ABC]$.



Факт 1. $[AOD] = [BOC]$.

Факт 2. $[ABO].[CDO] = [AOD]^2 = [BOC]^2$

Доказателството на първия факт следва от равенството на лицата на триъгълниците ABD и ABC, които имат обща основа AB и равни височини съответно от върховете D и C. Тогава $[AOD] = [ABD] – [ABO] = [ABC] – [ABO] = [BOC]$.

За доказателството на втория факт ще използваме, че триъгълниците ABO и AOD имат една и съща височина съответно към страните им BO и DO. Тогава $\frac{[ABO]}{[AOD]} = \frac{BO}{DO}$.

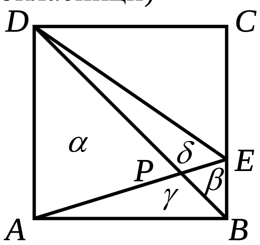
Аналогично $\frac{[BOC]}{[CDO]} = \frac{BO}{DO}$ и следователно $\frac{[ABO]}{[AOD]} = \frac{[BOC]}{[CDO]}$, откъдето

$$[ABO].[CDO] = [AOD].[BOC].$$

С помощта на факт 1 заключаваме, че $[ABO].[CDO] = [AOD]^2 = [BOC]^2$.

Пристъпваме към решаване на основната задача.

Решение 1. (подходящо за петокласници)



Ще използваме означенията $[DAP] = \alpha$, $[BEP] = \beta$, $[ABP] = \gamma$, $[DEP] = \delta$. От факт 1 следва, че $\alpha\beta = \gamma^2$. От друга страна $\alpha + \gamma = [ABD] = \frac{AB.AD}{2} = \frac{4.4}{2} = 8$, откъдето $\alpha = 8 - \gamma$. Също така $\beta + \gamma = [BED] = \frac{AB.BE}{2} = \frac{4.1}{2} = 2$, откъдето $\beta = 2 - \gamma$. Като заместим в равенството $\alpha\beta = \gamma^2$, получаваме $(8-\gamma)(2-\gamma) = \gamma^2$ и оттук $16 - 8\gamma - 2\gamma + \gamma^2 = \gamma^2$ и $\gamma = 1{,}6$. Тогава

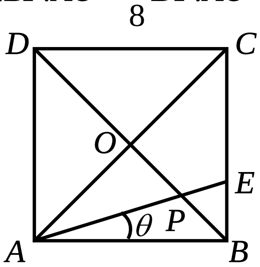
Решение 2. (чрез лица на подобни триъгълници)

Триъгълниците DAP и BEP са подобни и затова техните лица се отнасят, както $AD^2 : BE^2 = 16:1$, т. е. $[DAP]:[BEP] = 16:1$ и $[BEP] = \frac{1}{16}[DAP]$. Но в Решение 1 установихме, че $[DAP] + [ABP] = \alpha + \gamma = 8$, откъдето $[ABP] = 8 - [DAP]$. Освен това и $[ABP] + [BEP] = 2$, откъдето $[ABP] = 2 - [BEP]$. Заключаваме, че $8 - [DAP] = 2 - [BEP]$, т.е. $[DAP] - [BEP] = 6$. Окончателно $[DAP] - \frac{1}{16}[DAP] = 6$, откъдето $[DAP] = 6{,}4$.

Решение 3. (друг подобие)

$\Delta BEP \sim \Delta DAP$ и затова $\frac{1}{4} = \frac{BE}{AD} = \frac{BP}{PD}$, откъдето $BP : PD = 1:4$, т.е. $BP = \frac{1}{4}DP$. Нека O е пресечната точка на диагоналите на квадрата $ABCD$. Тъй като $AO \perp BP$, имаме

$$[ABP] = \frac{1}{2}.BP.AO = \frac{1}{8}DP.AO = \frac{1}{4}[DAP].$$



От друга страна $[ABD]=[ABP]+[DAP]$ или $8=\frac{1}{4}[DAP]+[DAP]=\frac{5}{4}[DAP]$, откъдето $[DAP]=\frac{32}{5}=6,4$.

Решение 4. (по Менелай)

Прилагаме теоремата на Менелай за правата BD и триъгълника ECA. Имаме:

$$\frac{CO}{OA}.\frac{AP}{PE}.\frac{EB}{BC}=1.$$

Но $CO=OA$, $BE=1$, $BC=4$ и затова $AP=4.PE$, откъдето $AE=5.PE$. От друга страна

$$\frac{[AOP]}{[ACE]}=\frac{\frac{1}{2}AO.AP\sin\angle OAP}{\frac{1}{2}AC.AE\sin\angle OAP}=\frac{AO}{2AO}.\frac{4PE}{5.PE}=\frac{2}{5}=0,4 \text{, т.е. } \frac{[AOP]}{[ACE]}=0,4.$$

Но $[\mathrm{ACE}]=\frac{1}{2}CE.AB=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4=6$ и $[AOP]=6.0,4=2,4$. Имаме още $[AOD]=4$ и затова $[DAP]=[DAO]+[AOP]=4+2,4=6,4$.

Решение 5. (чрез тригонометрия)

Ще използваме чертежа от Решение 3. Нека $\angle BAE=\theta$. Тогава $\angle APD=45^0+\theta$., като външен ъгъл за ΔABP. Освен това $DO=OA=2\sqrt{2}$. От правоъгълния триъгълник AOP имаме, че $tg\left(45^0+\theta\right)=\frac{OA}{OP}=\frac{2\sqrt{2}}{OP}$. Но $tg\left(45^0+\theta\right)=\frac{tg45^0+tg\theta}{1-tg45^0.tg\theta}=\frac{1+tg\theta}{1-tg\theta}=\frac{2\sqrt{2}}{OP}$. От правоъгълния триъгълник ABE имаме $tg\theta=\frac{BE}{AB}=\frac{1}{4}$ и затова $\frac{2\sqrt{2}}{OP}=\frac{1+tg\theta}{1-tg\theta}=\frac{1+\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{5}{3}$.

Оттук $OP=\frac{6\sqrt{2}}{5}$. По-нататък $DP=DO+OP=2\sqrt{2}+\frac{6\sqrt{2}}{5}=\frac{16\sqrt{2}}{5}$ и

$$[DAP]=\frac{1}{2}.DA.DP\sin 45^0=\frac{1}{2}.4.\frac{16\sqrt{2}}{5}.\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{32}{5}=6,4.$$

Окончателно $[DAP]=6,4$.

Решение 6. (чрез синусова теорема)

Ще използваме резултат от Решение 5, а именно, че $tg\theta=\frac{BE}{AB}=\frac{1}{4}$. Според синусовата теорема за триъгълника DAP имаме

$$\frac{4}{\sin\left(45^0+\theta\right)}=\frac{DP}{\sin\left(90^0-\theta\right)} \text{, т.е. } DP=\frac{4\cos\theta}{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\theta+\sin\theta\right)}=\frac{4\sqrt{2}}{1+tg\theta}=\frac{4\sqrt{2}}{1+\frac{1}{4}}=\frac{16\sqrt{2}}{5}.$$

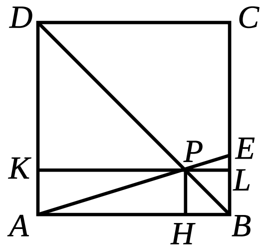
Тогава $[DAP]=\frac{AD.DP}{2}\sin 45^0=\frac{1}{2}.4.\frac{16\sqrt{2}}{5}.\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{32}{5}=6,4$, т.е. $[DAP]=6,4$.

Решение 7. (чрез координатен метод). Нека $A(0,0)$ е начало на правоъгълна координатна система с абсцисна ос $\overrightarrow{AB}$ и ординатна ос $\overrightarrow{AD}$. При това $B(4,0)$, $D(0,4)$, $E(4,1)$. Ще използваме следните уравнения на правите *AE* и *BD*:

$$AE: x-4y=0,$$
$$BD: x+y-4=0.$$

Координатите на точката $P=AE\cap BD$ са решение на горната система: $P(x,y)=P\left(\frac{16}{5},\frac{4}{5}\right)$. Имаме $[ABD]=[ABP]+[DAP]$. Но $[ABD]=\frac{1}{2}AB.AD=\frac{1}{2}.4.4=8$ и $[ABP]=\frac{1}{2}AB.y=\frac{1}{2}.4.\frac{4}{5}=1,6$. Тогава $[DAP]=[ABD]-[ABP]=8-1,6=6,4$.

Решение 8 (с допълнително построение)



До това „**лесно**“ решение стигнах, след като „**видях** и **написах**“ горните седем решения.

През точката P построяваме права, успоредна на *AB*, която пресича страните *AD* и *BC* съответно в точките *K* и *L*. Нека $PH\perp AB$ $(H\in AB)$. Тъй като $\angle DBC=45^0$, четириъгълникът *HBLP* е квадрат. Нека $PH=PL=x$. Тогава лицето на триъгълника ABE е сума от лицата на триъгълниците ABP и BEP, т.е.

$$[ABE]=[ABP]+[BEP]$$
$$\frac{AB.BE}{2}=\frac{AB.x}{2}+\frac{BE.x}{2}$$
$$\frac{4.1}{2}=\frac{4.x}{2}+\frac{1.x}{2}$$
$$x=\frac{4}{5}.$$

От това, че $4=AB=KL=KP+PL=KP+x=KP+\frac{4}{5}$, получаваме $KP=4-\frac{4}{5}=\frac{16}{5}$. Тогава $[DAP]=\frac{1}{2}AD.KP=\frac{1}{2}.4.\frac{16}{5}=\frac{32}{5}=6,4$ или $[DAP]=6,4$.

Ще завършим с наблюдението: Изглежда по-бързо се досещаме за по-трудните решения, отколкото за по-лесните! Дали е така, читателят ще реши сам за себе си.

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Гроздев, С., В. Ненков (2015). Задачи и решения 11-12клас, *Европейско кенгуру. Задачите на РУ*. София: Архимед.

2. Grozdev, S. (2007). *For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience* (*Theory and Practice*). Sofia: ADE, ISBN978-954-92139-1-1.

М+ДЕСЕТ ЗАДАЧИ ЗА...

ТЕОРЕМА НА ЛАЙБНИЦ ЗА ЧЕТИРИЪГЪЛНИК И НЕЙНИ ПРИЛОЖЕНИЯ

Христо Лесов, гр. Казанлък

Разглеждаме изпъкнал четириъгълник $ABCD$ с дължини a, b, c, d и e, f съответно на страните му AB, BC, CD, DA и на диагоналите му AC и BD. Нека G_1, G_2, G_3 и G_4 са медицентровете съответно на триъгълниците BCD, ACD, ABD, ABC. Отсечките AG_1, BG_2, CG_3 и DG_4 се наричат медиани на четириъгълника $ABCD$. За тях в [1] – Задача 1. е доказано, че те се пресичат в една точка G, като

$$AG : GG_1 = BG : GG_2 = CG : GG_3 = DG : GG_4 = 3 : 1.$$

Точката G се нарича медицентър (център на тежестта) на четириъгълника $ABCD$.

Да се докаже:

1. <u>*Теорема на Лайбниц*</u>: За медицентъра G на четириъгълник $ABCD$ и произволна точка Q е изпълнено следното равенство:

$$AQ^2 + BQ^2 + CQ^2 + DQ^2 = 4QG^2 + AG^2 + BG^2 + CG^2 + DG^2.$$

2. За медицентъра G на четириъгълник $ABCD$ и произволна точка Q е в сила равенството $QG^2 = \frac{1}{4}(AQ^2 + BQ^2 + CQ^2 + DQ^2) - \frac{1}{16}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2)$.

3. Точка Q от равнината на четириъгълник $ABCD$ е негов медицентър тогава и само тогава, когато $AQ^2 + BQ^2 + CQ^2 + DQ^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2)$.

4. От всички точки в равнината на даден четириъгълник $ABCD$ неговият медицентър G има най-малък сбор от квадратите на разстоянията до A, B, C и D.

5. Множеството от точките в равнината на даден четириъгълник $ABCD$, за които сборът от квадратите на разстоянията до A, B, C, D има постоянна стойност k^2, е окръжност с център медицентърът G на $ABCD$ и радиус, равен на

$$\sqrt{4k^2 - \left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2\right)}.$$

6. Ако в окръжност (κ) с център O и радиус R е вписан четириъгълник $ABCD$ и продълженията на отсечките AG, BG, CG и DG пресичат (κ) съответно в точките A_1, B_1, C_1 и D_1, то е в сила равенството $\dfrac{AG}{GA_1} + \dfrac{BG}{GB_1} + \dfrac{CG}{GC_1} + \dfrac{DG}{GD_1} = 4$.

7. В окръжност (κ) с център O и радиус R е вписан четириъгълник $ABCD$. Да се определи множеството от точките Q, вътрешни за (κ), за които е изпълнено равенството $\dfrac{AQ}{QA_1} + \dfrac{BQ}{QB_1} + \dfrac{CQ}{QC_1} + \dfrac{DQ}{QD_1} = 4$, където A_1, B_1, C_1 и D_1 са съответните пресечни точки на правите AQ, BQ, CQ, DQ и окръжността (κ).

8. Дадени са четириъгълник $ABCD$ и права m, които нямат общи точки. Да се намери точка от m, за която сборът от квадратите на разстоянията до A, B, C и D е най-малък.

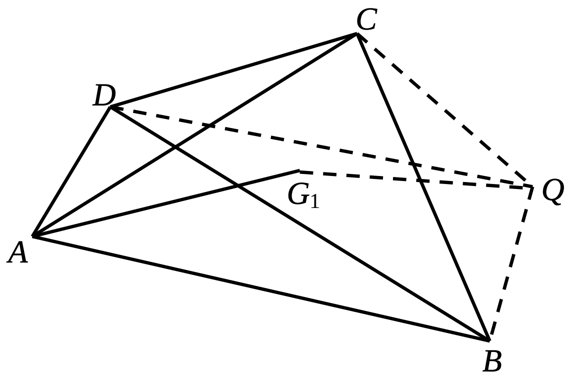
9. Дадени са четириъгълник $ABCD$ и окръжност (κ_1) с център O_1, които нямат общи точки. Да се намери точка от (κ_1), за която сборът от квадратите на разстоянията до A, B, C и D е най-малък.

10. Дадени са четириъгълник $ABCD$ и окръжност (κ_1) с център O_1, които нямат общи точки. Да се намери точка от (κ_1), за която сборът от квадратите на разстоянията до A, B, C и D е най-голям.

Отговори, упътвания, решения

1. От теоремата на Лайбниц за ΔBCD с медицентър G_1 и произволна точка Q в [2] – Задача 1. имаме:

$$BQ^2 + CQ^2 + DQ^2 = 3QG_1^{\ 2} + BG_1^{\ 2} + CG_1^{\ 2} + DG_1^{\ 2}$$



Оттук при $Q = G$ получаваме $BG^2 + CG^2 + DG^2 = 3GG_1^{\ 2} + BG_1^{\ 2} + CG_1^{\ 2} + DG_1^{\ 2}$ или

$$BG_1^{\ 2} + CG_1^{\ 2} + DG_1^{\ 2} = BG^2 + CG^2 + DG^2 - 3GG_1^{\ 2}$$

и понеже $AG = 3GG_1$, т.е. $GG_1 = \dfrac{1}{3}AG$, то

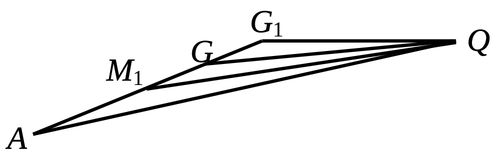
$$BG_1^2 + CG_1^2 + DG_1^2 = BG^2 + CG^2 + DG^2 - \frac{1}{3}AG^2 .$$

Така стигаме до следното равенство:

(1) $BQ^2 + CQ^2 + DQ^2 = 3QG_1^2 - \frac{1}{3}AG^2 + BG^2 + CG^2 + DG^2.$

Сега разглеждаме ΔAG_1Q, в който $G \in AG_1$ и $AG_1 = \frac{4}{3}AG$. Ако M_1 е средата на AG_1, то

$$AM_1 = M_1G_1 = \frac{1}{2}AG_1 = \frac{2}{3}AG \text{ и } M_1G = GG_1 = \frac{1}{2}M_1G_1 = \frac{1}{3}AG .$$



Така, QG е медиана в ΔQG_1M_1 и QM_1 е медиана в ΔAG_1Q. За тях от формулата за изразяване на медиана в триъгълник чрез страните му имаме

$$4QG^2 = 2QG_1^2 + 2QM_1^2 - M_1G_1^2$$

или $4QG^2 = 2QG_1^2 + 2QM_1^2 - \frac{4}{9}AG^2$ и $2QM_1^2 = AQ^2 + QG_1^2 - \frac{1}{2}AG_1^2$, т. е.

$2QM_1^2 = AQ^2 + QG_1^2 - \frac{8}{9}AG^2$, откъдето $4QG^2 = 3QG_1^2 + AQ^2 - \frac{4}{3}AG^2$ или

$3QG_1^2 = 4QG^2 - AQ^2 + \frac{4}{3}AG^2$. След заместване в (1) следва желаният резултат.

2. От **1.** изразяваме $QG^2 = \frac{1}{4}(AQ^2 + BQ^2 + CQ^2 + DQ^2) - \frac{1}{4}(AG^2 + BG^2 + CG^2 + DG^2)$

и като вземем пред вид, че $AG = \frac{3}{4}AG_1$, $BG = \frac{3}{4}BG_2$, $CG = \frac{3}{4}CG_3$, $DG = \frac{3}{4}DG_4$, получаваме

(2) $QG^2 = \frac{1}{4}(AQ^2 + BQ^2 + CQ^2 + DQ^2) - \frac{9}{64}(AG_1^2 + BG_2^2 + CG_3^2 + DG_4^2).$

От теоремата на Лайбниц за ΔBCD с медицентър G_1 и точка A имаме:

$$AB^2 + AC^2 + AD^2 = 3AG_1^2 + BG_1^2 + CG_1^2 + DG_1^2,$$

а чрез Задача 3. в [2] получаваме

$$BG_1^2 + CG_1^2 + DG_1^2 = \frac{1}{3}(BC^2 + BD^2 + CD^2)$$

и след заместване в предното равенство изразяваме:

$$AG_1^{\,2} = \frac{1}{3}(AB^2 + AC^2 + AD^2) - \frac{1}{9}(BC^2 + BD^2 + CD^2).$$

Като постъпим по същия начин за ΔACD с медицентър G_2 и точка B, за ΔABD с медицентър G_3 и точка C, за ΔABC с медицентър G_4 и точка D, стигаме до следните равенства:

$$BG_2^{\,2} = \frac{1}{3}(AB^2 + BC^2 + BD^2) - \frac{1}{9}(AC^2 + AD^2 + CD^2),$$

$$CG_3^{\,2} = \frac{1}{3}(AC^2 + BC^2 + CD^2) - \frac{1}{9}(AB^2 + AD^2 + BD^2),$$

$$DG_4^{\,2} = \frac{1}{3}(AD^2 + BD^2 + CD^2) - \frac{1}{9}(AB^2 + AC^2 + BC^2).$$

Остава да заместим в равенството (2) с тези четири израза и да извършим съответните преобразувания.

3. Следва от **2.** при $Q = G$, т.е. при $QG = 0$.

4. Тъй като $QG^2 \ge 0$, от резултата в **2.** следва, че е изпълнено неравенството

$$AQ^2 + BQ^2 + CQ^2 + DQ^2 \ge \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2),$$

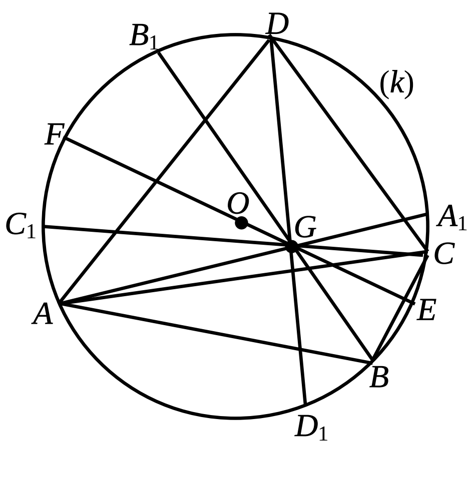
като равенството е само за $Q = G$, което означава, че най-малката стойност на сбора $AQ^2 + BQ^2 + CQ^2 + DQ^2$ е равна на $\frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2)$ и тя се достига само за медицентъра G на четириъгълника $ABCD$.

5. По условие $AQ^2 + BQ^2 + CQ^2 + DQ^2 = k^2$, а чрез резултата в **2.** имаме

$$QG^2 = \frac{1}{4}(AQ^2 + BQ^2 + CQ^2 + DQ^2) - \frac{1}{16}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2),$$

откъдето изразяваме $QG = \frac{1}{4}\sqrt{4k^2 - (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2)}$ и следва търсеното.

6. Нека E и F са пресечните точки на правата OG и окръжността (κ).



Тогава са в сила равенствата

$$AG.GA_1 = BG.GB_1 = CG.GC_1 = DG.GD_1 = EG.GF = (R+OG).(R-OG) = R^2 - OG^2$$

и даденото равенство приема вида:

$$\frac{AG}{GA_1}+\frac{BG}{GB_1}+\frac{CG}{GC_1}+\frac{DG}{GD_1}=\frac{AG^2}{AG.GA_1}+\frac{BG^2}{BG.GB_1}+\frac{CG^2}{CG.GC_1}+\frac{DG^2}{DG.GD_1}=$$

$$=\frac{AG^2+BG^2+CG^2+DG^2}{R^2-OG^2}=4$$

или $AG^2 + BG^2 + CG^2 + DG^2 = 4(R^2 - OG^2)$. От теоремата на Лайбниц (**1.**) при $Q = O$ имаме $AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2 = 4OG^2 + AG^2 + BG^2 + CG^2 + DG^2$, а понеже

$AO = BO = CO = DO = R$, получаваме $AG^2 + BG^2 + CG^2 + DG^2 = 4R^2 - 4OG^2$ и така стигаме до искания резултат.

7. От резултата в предната задача става ясно, че точката G принадлежи на търсеното множество. А при $Q = O$ имаме

$$AO = OA_1 = BO = OB_1 = CO = OC_1 = DO = OD_1 = R$$

и всяка от дробите в даденото равенство е равна на 1. Следователно и точката O е от това множество. Ако правата OQ пресича окръжността (κ) в точките E_1 и F_1, тогава имаме

$$AQ.QA_1 = BQ.QB_1 = CQ.QC_1 = DQ.QD_1 = E_1Q.QF_1 = (R+OQ).(R-OQ) = R^2 - OQ^2$$

и даденото равенство има вида

$$\frac{AQ}{QA_1}+\frac{BQ}{QB_1}+\frac{CQ}{QC_1}+\frac{DQ}{QD_1}=\frac{AQ^2}{AQ.QA_1}+\frac{BQ^2}{BQ.QB_1}+\frac{CQ^2}{CQ.QC_1}+\frac{DQ^2}{DQ.QD_1}=$$

$$=\frac{AQ^2+BQ^2+CQ^2+DQ^2}{R^2-OQ^2}=4$$

или $AQ^2 + BQ^2 + CQ^2 + DQ^2 = 4(R^2 - OQ^2)$. От теоремата на Лайбниц (**1.**) имаме равенството $AQ^2 + BQ^2 + CQ^2 + DQ^2 = 4QG^2 + AG^2 + BG^2 + CG^2 + DG^2$ и като вземем пред вид резултата от **6.**, стигаме до $4(R^2 - OQ^2) = 4QG^2 + 4(R^2 - OG^2)$ или $OQ^2 + QG^2 = OG^2$. От обратната теорема на Питагор следва, че ъгълът OQG е прав и точката Q принадлежи на окръжност с диаметър $OG < R$, а тази окръжност е вътре в (κ).

Нека сега Q е точка от окръжността с диаметър OG. Тогава Q е вътрешна точка за (κ) и $OQ^2 + QG^2 = OG^2$, т.е. $QG^2 + R^2 - OG^2 = R^2 - OQ^2$. Чрез това равенство и теоремата на Лайбниц, както по-горе имаме:

$$\frac{AQ}{QA_1}+\frac{BQ}{QB_1}+\frac{CQ}{QC_1}+\frac{DQ}{QD_1}=$$

$$=\frac{AQ^2+BQ^2+CQ^2+DQ^2}{R^2-OQ^2}=\frac{4QG^2+AG^2+BG^2+CG^2+DG^2}{R^2-OQ^2}=\frac{4QG^2+4(R^2-OG^2)}{R^2-OQ^2}=4$$

така, че

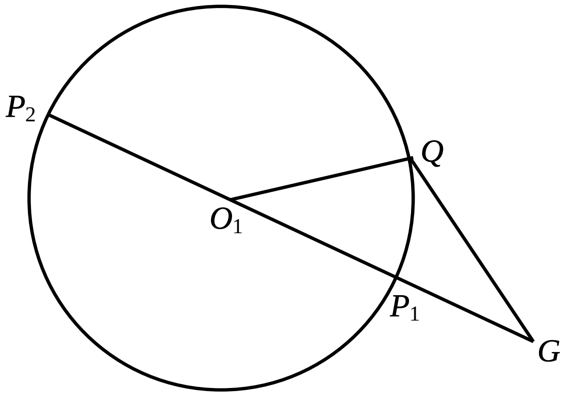
точките от окръжността с диаметър OG изпълняват условието на задачата и вече следва, че тази окръжност е търсеното множество.

8. Нека G е медицентърът на четириъгълника $ABCD$, а Q е точка от дадената права m. От теоремата на Лайбниц следва, че сборът $AQ^2 + BQ^2 + CQ^2 + DQ^2$ е най-малък, когато отсечката QG има най-малка дължина. Тя се достига само когато $QG \perp m$, т. е. търсената точка е петата на перпендикуляра от G към правата m.

9. Нека G е медицентърът на четириъгълника $ABCD$, а Q е точка от дадената окръжност (κ_1). От теоремата на Лайбниц следва, че сборът $AQ^2 + BQ^2 + CQ^2 + DQ^2$ е най-малък само когато отсечката QG има най-малка дължина. Ако отсечката GO_1 пресича (κ_1) в точка P_1 (вж. чертежа), от ΔGO_1Q имаме $O_1Q + QG \geq O_1G$ или

$$O_1Q + QG \geq O_1\,P + P_1G,\ \text{т. е. } QG \geq P_1G,$$

понеже $O_1Q = O_1P_1$ – радиуси на окръжността (κ_1). Следователно търсената точка е P_1.



10. Нека G е медицентърът на четириъгълника $ABCD$, а Q е точка от дадената окръжност (κ_1). От теоремата на Лайбниц следва, че сборът $AQ^2 + BQ^2 + CQ^2 + DQ^2$ е най-голям само когато отсечката QG има най-голяма дължина. Ако продължението на отсечката GO_1 пресича (κ_1) в точка P_2 – диаметрално противоположната на P_1 (вж. чертежа), от ΔGO_1Q имаме $QG \leq O_1G + O_1Q$ или $QG \leq O_1G + O_1P_2$, т. е. $QG \leq P_2G$, понеже $O_1Q = O_1P_2$ – радиуси на окръжността (κ_1). Следователно търсената точка е P_2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хр. Лесов, М+ десет задачи за медицентър на изпъкнал четириъгълник, списание „Математика плюс", кн. 2, 2011 г., стр. 18-20 .

2. Хр. Лесов, М+ десет задачи за теорема на Лайбниц за триъгълник и нейни приложения, списание „Математика плюс", кн. 1, 2018 г., стр. 26-31.

3. Хр. Лесов, М+ десет задачи за екстремални разстояния, списание „Математика плюс", кн. 3, 2005 г., стр. 22-23.

рубриката и ще бъдат награждавани.

ЗАДАЧИ М+

В тази рубрика, която се води от доц. д-р Веселин Ненков, се публикуват задачи за ученици от горните класове, за студенти и учители. Основният признак за подбор е оригиналност. Това не означава задължителна новост, защото твърдението, че една задача е нова, остава в сила до доказване на противното. Оригиналността включва естетичност и остроумие, а решаването на задачи с подобни качества изисква инициативност, откривателски подход, интелектуално усилие. Рубриката разчита на активното Ви участие както с решения, така и с предложения на задачи. Изпращайте ги на адрес:

1618 София,
ул. "Гусла" № 1
ВУЗФ
Росица Петрова

В писмата си посочвайте училището (университета) и класа (курса), ако сте ученик (студент). Желателно е предлаганите задачи да са напечатани в два екземпляра с кратки, но пълни решения. Ще отбелязваме имената на тези, които са направили предложенията. Ако задачата е заета, посочете източника. В писмото си поставете празен плик с точния Ви адрес. Без да извършва класиране, М+ ще обсъжда изпратените решения, а най-хубавите от тях ще намерят място на страниците на рубриката и ще бъдат награждавани.

М+601. Ако всяко от естествените числа N_1 и N_2 е равно на сумата от кубовете на цифрите си, да се намерят всички естествени числа M, за които е изпълнено равенството $M=\sqrt{N_1+N_2+6}$.

(Сава Гроздев, гр. София, Веселин Ненков, с. Бели Осъм)

М+602. Да се намери най-малкото естествено число n, за което съществуват n куба с дължини на ръбовете в сантиметри естествени числа и сбор на обемите $2019\,cm^3$.

(Христо Лесов, гр. Казанлък)

М+603. Нека a, b и c са реални положителни числа, а за реалните числа x, y и z са изпълнени условията $x,y,z\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ и $xy+yz+zx+2xyz=1$. Да се докаже, че $2\left(a^2x+b^2y+c^2z\right)+a^2+b^2+c^2\geq 2\left(ab+bc+ca\right)$. Кога се достига равенство?

(Мариан Куконе, Лучиан Туцеску, Крайова)

М+604. Даден е правоъгълник $A_1A_2A_3A_4$ с дължина на диагонала d. Да се намери геометричното място на точките M, за които е изпълнено равенството $A_1M^2+A_2M^2+A_3M^2+A_4M^2=2.d^2$.

(Милен Найденов, гр. Варна)

М+605. В изпъкналия четириъгълник $ABCD$ диагоналът AC разполовява ъгъл BAD и $\sphericalangle BCD=90^\circ+\sphericalangle BAD$. Нека C_1 е симетричната точка на върха C относно диагонала BD. Да се докаже, че ортогоналните проекции M, N, P и Q на C_1 съответно върху страните AB, BC, CD и DA са върхове на успоредник.

(Хаим Хаимов, гр. Варна)

М+606. Квадрат $ABCD$ със страна 2019 е разделен на 2019^2 единични квадратчета с помощта на прави, успоредни на страните му. Във върховете A, B, C и D са записани съответно числата 1, 2, 3 и 4. Числата 1,

2, 3 и 4 са записани и във върховете на единичните квадратчета по следния начин: 1) ако връх на единично квадратче се намира върху някоя от отсечките AB, BC, CD, DA или AC, в него се записва някое от числата, записани в краищата на съответната отсечка; 2) ако връх на единично квадратче е вътрешна точка за някой от триъгълниците ABC или ADC, в него се записва някое от числата, записани във върховете на съответния триъгълник. Във всяко единично квадратче се записва сумата на числата, намиращи се във върховете му.

а) Съществува ли такова разпределение на числата 1, 2, 3 и 4, което съдържа повече от 2019 единични квадратчета, във всяко от които е записано числото 10?

б) Нека разпределението на числата 1, 2, 3 и 4 е такова, че не съдържа единично квадратче, в което е записано числото 10. Да се докаже, че това разпределение съдържа две единични квадратчета, в които са записани числа, сумата на които е не по-малка от 16.

(Сава Гроздев, гр. София, Веселин Ненков, с. Бели Осъм)

Краен срок за изпращане на решения: 15.12.2019 г.

М + Р Е Ш Е Н И Я

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 2, 2018

М+589. Да се намерят естествените числа x, y и z, които удовлетворяват:

а) $x^2+y^3+z^6=2018$; б) $x^2+y^4+z^8=2018$.

(Христо Лесов, гр. Казанлък)

Решение. а) Тъй като $x\geq 1$, $y\geq 1$ и $z\geq 1$, то $1^2+1^3+z^6=x^2+y^3+z^6=2018$. Оттук $z^6\leq 2016<4096=4^6$ и затова $z\leq 3$. Разглеждаме трите възможни случая по-отделно.

а1) При $z=3$ имаме $x^2+y^3=1289$ и $1^2+y^3\leq x^2+y^3=1289$. Следователно $y^3\leq 1288<1331=11^3$ и $y\leq 10$. С непосредствена проверка се установява, че при $y=1,2,3,5,6,7,8,9$ няма естествени числа x, удовлетворяващи $x^2+y^3=1289$. При $y=4$ и $y=10$ това уравнение се удовлетворява съответно от $x=35$ и $x=17$. Така получаваме двете решения $x=35$, $y=4$, $z=3$ и $x=17$, $y=10$, $z=3$.

а2) При $z=2$ имаме $x^2+y^3=1954$ и $1^2+y^3\leq x^2+y^3=1954$. Следователно $y^3\leq 1953<2197=13^3$ и $y\leq 12$. С непосредствена проверка се установява, че при $y=1,2,3,5,6,7,8,10,11,12$ няма естествени числа x, удовлетворяващи $x^2+y^3=1954$. При $y=9$ това уравнение се удовлетворява от $x=35$. Така в този случай получаваме решението $x=35$, $y=9$, $z=2$.

а3) При $z=1$ имаме $x^2+y^3=2017$ и $1^2+y^3\leq x^2+y^3=2017$. Следователно $y^3\leq 2016<2197=13^3$ и $y\leq 12$. С непосредствена проверка се установява, че при $y=1,2,3,5,6,7,8,9,10,11$ няма естествени числа x, удовлетворяващи $x^2+y^3=2017$. При $y=12$ това уравнение се удовлетворява от $x=17$. Така в този случай получаваме решението $x=17$, $y=12$, $z=1$.

Следователно всички тройки (x,y,z) от естествени числа, удовлетворяващи уравнението $x^2+y^3+z^6=2018$, са следните: $(17,12,1)$, $(35,9,2)$, $(35,4,3)$, $(17,10,3)$.

б) Тъй като $x\geq 1$, $y\geq 1$ и $z\geq 1$, то $1^2+1^4+z^8=x^2+y^4+z^8=2018$. Оттук $z^8\leq 2016<6561=3^8$ и затова $z\leq 2$. Разглеждаме двата възможни случая по-отделно.

б1) При $z=2$ имаме $x^2+y^4=1762$ и $1^2+y^4\le x^2+y^4=1762$. Следователно $y^4\le 1761<2401=7^4$ и $y\le 6$. С непосредствена проверка се установява, че при $y=1,2,4,5,6$ няма естествени числа x, удовлетворяващи $x^2+y^4=1762$. При $y=3$ това уравнение се удовлетворява от $x=41$. Така в този случай получаваме решението $x=41$, $y=3$, $z=2$.

б2) При $z=1$ имаме $x^2+y^4=2017$ и $1^2+y^4\le x^2+y^4=2017$. Следователно $y^4\le 2016<2401=7^4$ и $y\le 6$. С непосредствена проверка се установява, че при $y=1,2,4,5,6$ няма естествени числа x, удовлетворяващи $x^2+y^4=2017$. При $y=3$ това уравнение се удовлетворява от $x=44$. Така в този случай получаваме решението $x=44$, $y=3$, $z=1$.
Следователно всички тройки (x,y,z) от естествени числа, удовлетворяващи уравнението $x^2+y^4+z^8=2018$, са следните: $(44,3,1)$, $(41,3,2)$.

M+590. Реалните числа x, y и z удовлетворяват равенствата

$$x^3+12xyz-3x^2-8xy-12yz-18zx+17x+8y+18z-5=0,$$
$$8y^3-6xyz-36y^2+4xy+6yz+9zx-6x+54y-9z-47=0,$$
$$27z^3+12xyz-54z^2-8xy-12yz-18zx+12x+8y+60z-14=0.$$

Да се намери стойността на израза $x+2y+3z$.

(Сава Гроздев, гр. София, Веселин Ненков, с. Бели Осъм)

Решение. Полагаме $x=u+1$, $y=\dfrac{v+3}{2}$ и $z=\dfrac{w+2}{3}$. Дадените равенства преминават в следните $u^3+2u+2uvw+10=0$, $v^3+2v-uvw-20=0$, $w^3+2w+2uvw+10=0$.
Събираме почленно последните три равенства и получаваме

$$u^3+v^3+w^3+3uvw+2(u+v+w)=0.$$

Това равенство е еквивалентно с $(u+v+w)(u^2+v^2+w^2-uv-vw-wu+2)=0$. Тъй като $u^2+v^2+w^2\ge uv+vw+wu$, то $u+v+w=0$. След почленно събиране на равенствата $u=x-1$, $v=2y-3$ и $w=3z-2$ получаваме $0=u+v+w=x+2y+3z-6$. Следователно $x+2y+3z=6$.

M+591. Нека $0<a<b$ и x_1, x_2, …, x_n, y_1, y_2, …, y_n са реални числа от интервала $[a,b]$.

а) Да се докаже, че $\dfrac{a}{b}\le\dfrac{x_i}{y_i}\le\dfrac{b}{a}$ $(i=1,2,\dots,n)$.

б) Ако $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2$, да се докаже неравенството

$$\frac{x_1^3}{y_1}+\frac{x_2^3}{y_2}+\cdots+\frac{x_n^3}{y_n}<\frac{a^4+b^4}{ab(a^2+b^2)}\left(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\right).$$

(Кристиан Моанца, Лучиан Туцеску, Крайова)

Решение. а) Тъй като $0<a\le x_i$ и $0<y_i\le b$, след почленно умножение получаваме $ay_i\le bx_i$, което е еквивалентно с лявото неравенство. Аналогично от неравенствата $0<a\le y_i$ и $0<x_i\le b$, след почленно умножение получаваме $ax_i\le by_i$, което е еквивалентно с дясното неравенство. Трябва да се отбележи, че двете неравенства не се изпълняват едновременно, защото $a\ne b$.

б) Ако $n=1$, имаме $x_1=y_1$. Тогава желаното неравенство е еквивалентно с $(a-b)^2(a^2+ab+b^2)>0$, което е очевидно. Нека сега $n\ge 2$. От а) следват неравенствата

$\frac{a}{b} \le \sqrt{\frac{x_i^3}{y_i}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x_i y_i}} \le \frac{b}{a}$. Оттук имаме $\frac{a}{b}\sqrt{x_i y_i} - \sqrt{\frac{x_i^3}{y_i}} \le 0$ и $\frac{b}{a}\sqrt{x_i y_i} - \sqrt{\frac{x_i^3}{y_i}} \ge 0$. След почленно умножение на последните неравенства се получава $\left(\frac{a}{b}\sqrt{x_i y_i} - \sqrt{\frac{x_i^3}{y_i}}\right)\left(\frac{b}{a}\sqrt{x_i y_i} - \sqrt{\frac{x_i^3}{y_i}}\right) \le 0$.

Оттук следва $x_i y_i + \frac{x_i^3}{y_i} - \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) x_i^2 \le 0$. Сега след сумиране по i получаваме $\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^3}{y_i} \le \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$. Отново от а) следват неравенствата $\frac{a}{b} y_i \le x_i \le \frac{b}{a} y_i$. Оттук $\left(x_i - \frac{a}{b} y_i\right)\left(x_i - \frac{b}{a} y_i\right) \le 0$. След разкриване на скобите получаваме $x_i^2 + y_i^2 - \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) x_i y_i \le 0$. Като вземем предвид условието, имаме $-\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \le -\frac{2}{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}} \sum_{i=1}^{n} x_i^2$. От това неравенство и полученото преди следва

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^3}{y_i} \le \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \le \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - \frac{2}{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}}\right) \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \frac{a^4 + b^4}{ab\left(a^2 + b^2\right)} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 .$$

С това неравенството е доказано. Равенство се достига само когато $x_i = \frac{a}{b} y_i$ или $x_i = \frac{b}{a} y_i$. От условието $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2$ следва, че $\left(\frac{a^2}{b^2} - 1\right)\left(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2\right) = 0$ или $\left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right)\left(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2\right) = 0$. И двата случая водят до $a = b$ или $y_1 = y_2 = \cdots = y_n = 0$. Заключаваме, че равенство не се достига.

М+592. Да се намерят всички триъгълници с целочислени страни, лицето и обиколката на които са равни.

(Милен Найденов, гр. Варна)

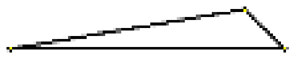
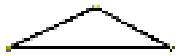
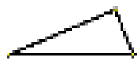
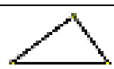
Решение. С a, b, c означаваме страните на произволен триъгълник, с S – лицето му. От Хероновата формула и условието имаме $2p = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, където $p = \frac{a+b+c}{2}$. Оттук следва равенството $4p = (p-a)(p-b)(p-c)$. След като положим $x = p-a$, $y = p-b$ и $z = p-c$, последното равенство преминава в Диофантовото уравнение $4(x+y+z) = xyz$. Тъй като няма значение как са означени страните на даден триъгълник, няма да е ограничение, ако предполагаме, че в последното уравнение са изпълнени неравенствата $x \ge y \ge z$. В началото да предположим, че $z \ge 4$. Тогава от равенството $z = \frac{4(x+y)}{xy-4}$ следва $(x-1)(y-1) \le 5$. Тъй като $x \ge z \ge 4$, това неравенство се удовлетворява само при $x_1 = 4$, $x_2 = 5$ и $x_3 = 6$. Но при тези стойности на x неравенството се удовлетворява само когато $y = 2$. Сега от неравенството $y \ge z \ge 4$ следва, че разглежданото Диофантово уравнение при наложените ограничения $x \geq y \geq z$ няма решение, когато $z \geq 4$. Следователно са възможни три случая.

1) Ако $z = 1$, имаме $x = 4 + \dfrac{20}{y-4}$. Естествени стойности за x се получават само когато $y - 4 = 1, 2, 4, 5, 10, 20$, т.е. $y = 5, 6, 8, 9, 14, 24$. При тези стойности на y съответните стойности на x са следните: $x = 24, 14, 9, 8, 6, 5$. Тъй като $x \geq y$, оттук следва, че наредените тройки (x, y, z), които са решения на Диофантовото уравнение в този случай, са следните: $(24,5,1)$, $(14,6,1)$, $(9,8,1)$.

2) Ако $z = 2$, имаме $x = 2 + \dfrac{8}{y-2}$. Естествени стойности за x се получават само когато $y - 2 = 1, 2, 4, 8$, т.е. $y = 3, 4, 6, 10$. При тези стойности на y съответните стойности на x са следните: $x = 10, 6, 4, 3$. Тъй като $x \geq y$, оттук следва, че наредените тройки (x, y, z), които са решения на Диофантовото уравнение в този случай, са следните: $(10,3,2)$, $(6,4,2)$.

3) Ако $z = 3$, имаме $x = 1 + \dfrac{y+16}{3y-4}$. Следователно $\dfrac{y+16}{3y-4} \geq 1$. Оттук следва, че y удовлетворява неравенството $(3y-4)(y-10) \leq 0$, т.е. $\dfrac{4}{3} < y \leq 10$. Следователно y е цяло число от затворения интервал $[2,10]$. Само при $y_1 = 2$ и $y_2 = 10$ се получават естествени стойности за x, които са съответно $x_1 = 10$ и $x_2 = 2$. Тъй като $x \geq 3$ и $y \geq 3$, при $z = 3$ не се получават нови решения на Диофантовото уравнение.

От направените изследвания стигаме до извода, че има точно пет триъгълника, удовлетворяващи условието на задачата. Тези решения се получават чрез равенствата $a = y + z$, $b = z + x$, $c = x + y$. Решенията са систематизирани в следващата таблица:

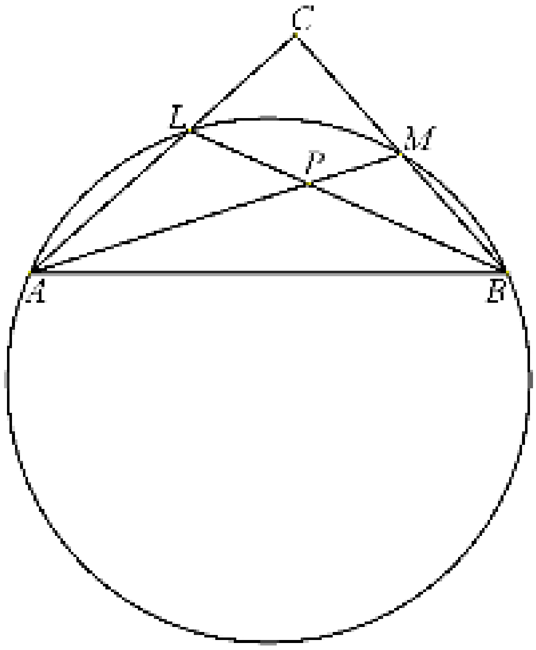
№	x	y	z	a	b	c	S	Вид на триъгълника
1	24	5	1	6	25	29	60	
2	14	6	1	7	15	20	42	
3	9	8	1	9	10	17	36	
4	10	3	2	5	12	13	30	
5	6	4	2	6	8	10	24	

От получените резултати се забелязва, че три от триъгълниците са тъпоъгълни и два правоъгълни. Не съществуват нито равнобедрени, нито остроъгълни триъгълници, които са решения на поставената задача.

М+593. В правоъгълния триъгълник ABC точката M е среда на катета BC, пресечната точка на ъглополовящата на $\sphericalangle ABC$ и катета AC е L и $AM \cap BL = P$. Ако точките A, B, M и L лежат на една окръжност, да се намери отношението $BP : LP$.

(Сава Гроздев, гр. София, Веселин Ненков, с. Бели Осъм)

Решение. Нека $BC = a$. От свойството на ъглополовящата следва, че е изпълнено равенството $\frac{CL}{AL} = \frac{BC}{BA}$. Оттук $CL.BA = AL.CB = (AC - CL).CB$, което води до $CL = \frac{a.AC}{AB + a}$. Освен това, от теоремата за секущите имаме $CL.CA = CM.CB$. Затова $CL = \frac{a^2}{2.AC}$. Като приравним получените два израза за CL, получаваме $AC^2 = \frac{a(AB + a)}{2}$. От Питагоровата теорема следва, че $AC^2 = AB^2 - BC^2 = AB^2 - a^2$. Следователно $\frac{a(AB + a)}{2} = AB^2 - a^2$, т.е. $a(AB + a) = 2(AB - a)(AB + a)$. Така получаваме $AB = \frac{3}{2}a$. Сега от Питагоровата теорема, приложена за триъгълниците ABC и AMC, се получават съответно равенствата $AC = \frac{\sqrt{5}}{2}a$ и $AM = \frac{\sqrt{6}}{2}a$. От получения по-рано израз $CL = \frac{a^2}{2.AC}$ намираме, че $CL = \frac{\sqrt{5}}{5}a$. Оттук и $AL = AC - CL = \frac{3\sqrt{5}}{10}a$. От Питагоровата теорема за ΔBLC следва, че $BL = \sqrt{\frac{6}{5}}.a$. По-нататък, тъй като BP е ъглополовяща в ΔABM, то $\frac{AP}{MP} = \frac{AB}{MB} = 3$, т.е. $AP = 3.MP$. Следователно $MP = \frac{\sqrt{6}}{8}a$ и $AP = \frac{3\sqrt{6}}{8}a$. От ΔBLC се получава, че $\cos\sphericalangle CBL = \frac{BC}{BL} = \sqrt{\frac{5}{6}}$. Тъй като



$\sphericalangle LAP = \sphericalangle CBL = \frac{\overset{\frown}{LM}}{2}$, от косинусовата теорема за ΔAPL получаваме $LP = \frac{3}{8}\sqrt{\frac{6}{5}}.a$. Сега от равенството $BP + LP = BL = \sqrt{\frac{6}{5}}.a$ следва, че $BP = \frac{5}{8}\sqrt{\frac{6}{5}}.a$. Оттук получаваме окончателно, че $BP : LP = 5 : 3$.

<u>**Друг подход:**</u> От теоремата за секущите имаме $BP.LP = AP.MP$, т.е. $BP.LP = \frac{9}{32}$. Освен това $BP + LP = BL = \sqrt{\frac{6}{5}}.a$. Следователно BP и LP са корени на квадратното уравнение $x^2 - \sqrt{\frac{6}{5}}.a.x + \frac{9}{32}a^2 = 0$. Корените на това уравнение са $x_1 = \frac{5}{8}\sqrt{\frac{6}{5}}.a$ и $x_2 = \frac{3}{8}\sqrt{\frac{6}{5}}.a$. Тук трябва да се съобрази, че $BP > LP$. Затова $BP = \frac{5}{8}\sqrt{\frac{6}{5}}.a$ и $LP = \frac{3}{8}\sqrt{\frac{6}{5}}.a$. Оттук следва $BP : LP = 5 : 3$.

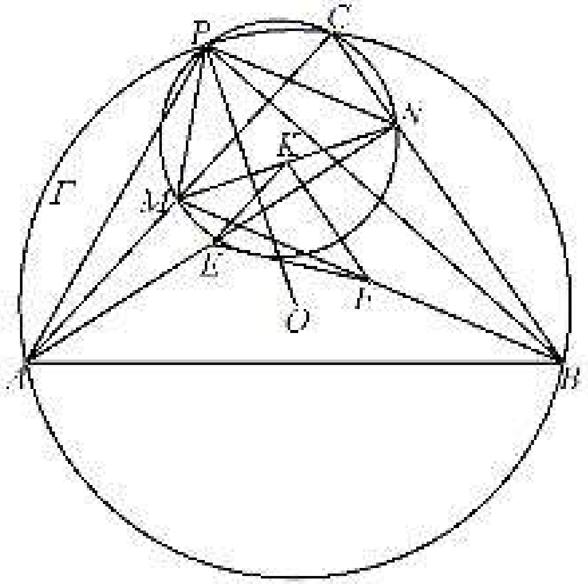
M+594. Остроъгълният триъгълник ABC е вписан в окръжност $\Gamma(O,R)$. Точките M и N лежат съответно върху страните AC и BC така, че $\sphericalangle MON = \sphericalangle ACB$ и $\dfrac{AM}{MO} = \dfrac{BN}{NO}$.

а) Да се определи разстоянието от точката O до правата MN.

б) Ако E и F са средите съответно на отсечките AN и BM, да се докаже, че $EF > \dfrac{1}{2}MN$.

(Хаим Хаимов, гр. Варна)

Решение. а) Нека P е точката, симетрична на центъра O на Γ относно правата MN. Ще докажем, че $P \in \Gamma$. Това означава, че $OP = R$ и търсеното разстояние е $\dfrac{R}{2}$. От симетрията следва, че $\sphericalangle MPN = \sphericalangle MON$, а по условие имаме $\sphericalangle MON = \sphericalangle MCN$. Затова $\sphericalangle MPN = \sphericalangle MCN$. Следователно точките M, N, C и P лежат на една окръжност. Тогава $\sphericalangle PMC = \sphericalangle PNC$. Оттук получаваме, че $\sphericalangle AMP = \sphericalangle BNP$. Като вземем предвид, че по условие е изпълнено $\dfrac{AM}{MO} = \dfrac{BN}{NO}$, имаме $\dfrac{AM}{MP} = \dfrac{AM}{MO} = \dfrac{BN}{NO} = \dfrac{BN}{NP}$. Така заключаваме, че $\Delta AMP \sim \Delta BNP$. Следователно $\sphericalangle PAM = \sphericalangle PBN$. Следователно точките A, B, C и P лежат на една окръжност, т.е. $P \in \Gamma$.



б) Означаваме с K средата на отсечката MN и полагаме $\dfrac{AM}{MO} = \dfrac{BN}{NO} = k$. Ще докажем, че $EF = \dfrac{k}{2}MN$. От свойствата на средните отсечки следва $EK \parallel AM$, $FK \parallel BN$, $EK = \dfrac{1}{2}AM$ и $FK = \dfrac{1}{2}BN$. Затова $\sphericalangle EKF = \sphericalangle ACB = \sphericalangle MON$, $\dfrac{EK}{MO} = \dfrac{AM}{2MO} = \dfrac{k}{2}$ и $\dfrac{FK}{NO} = \dfrac{BN}{2NO} = \dfrac{k}{2}$. Следователно $\Delta EFK \sim \Delta MNO$. Оттук $\dfrac{EF}{MN} = \dfrac{EK}{MO} = \dfrac{k}{2}$ и $EF = \dfrac{k}{2}MN$. За да се докаже, че $EF > \dfrac{1}{2}MN$, остава да установим, че $k > 1$. Да допуснем, че $k \le 1$. От условието следва, че $AM \le MO$ и $BN \le NO$. Тогава $\sphericalangle AOM = \sphericalangle OAM$ и $\sphericalangle BON \le \sphericalangle OBN$. Оттук $\sphericalangle AOM + \sphericalangle BON \le \sphericalangle OAM + \sphericalangle OBN$. Но, ако $\sphericalangle ACB = \gamma$, то

$$\sphericalangle AOM + \sphericalangle BON = 360^\circ - \sphericalangle AOB - \sphericalangle MON = 360^\circ - 3\gamma,$$

$$\sphericalangle OAM + \sphericalangle OBN = \sphericalangle OAC + \sphericalangle OBC = \sphericalangle AOB - \sphericalangle ACB = \gamma.$$

Следователно $360^\circ - 3\gamma \le \gamma$, т.е. $\gamma \ge 90^\circ$. Това противоречи на условието, че ΔABC е остроъгълен. Следователно $k > 1$.

M + PREPARATION

CONSTRUCTIVE PROBLEMS. PART 1

Navid Safaei, Sharif university of Technology – Tehran, Iran

In this article we deal with some relatively hard problems in elementary Number theory. For this reason, first we provide some lemmas which facilitate the proofs.

Definition. Define $v_p(a)$ to be the number of times that the prime p occurs in the prime factorization of a.

Lemma 1. Let a be an integer, the following two statements are equivalent:

a. $v_p(a \pm 1) = s \geq 1$

b. $v_p(a^p \pm 1) = s + 1$

Proof. If $v_p(a \pm 1) = s \geq 1$, then $\frac{a^p \pm 1}{a \pm 1} \equiv p \pmod{p^2}$. Since $v_p(a^p \pm 1) = v_p(a \pm 1) + v_p\left(\frac{a^p \pm 1}{a \pm 1}\right)$ we are done. On the other hand, since $p | a^p \pm 1$, by Fermat's little theorem we find that $a \pm 1$ is divisible by p and by the above proof we are done.

Remark 1. The above lemma has a very important application, that is, assume $v_p(a^r \pm 1) = s \geq 1$. Then $v_p(a^{pr} \pm 1) = s + 1$.

Remark 2. Analogously, assuming $v_p(a^r \pm b^r) = s \geq 1$ we have $v_p(a^{pr} \pm b^{pr}) = s + 1$.

Lemma 2. Let a be a positive integer, then there exists a prime q such that $q | \frac{a^p+1}{a+1}$ but $q \nmid a + 1$ except the case $a = 2, p = 3$. Moreover, let a be a positive integer, then there exists a prime q such that $q | \frac{a^p-1}{a-1}$ but $q \nmid a - 1$ except the case $a + 1 = 2^m, p = 2$.

Proof. We shall prove the first case, the second case is analogously deduced. Assume the contrary. Then all of the common primes will appear in the greatest prime divisors. Since $\gcd\left(\frac{a^p+1}{a+1}, a+1\right) = 1$ or p, we find that $\frac{a^p+1}{a+1}$ must be power of p. By the previous lemma we find that if $p | a + 1$, then $v_p\left(\frac{a^p+1}{a+1}\right) = 1$. We find that $\frac{a^p+1}{a+1} = p$ but $\frac{a^p+1}{a+1} > a^2 - a + 1 > a + 1 \geq p$ except the case $a = 2, p = 3$. Our proof is completed.

Remark 3. Analogously, we can find that $a^p + b^p$ has always a prime divisor which isn't divisor of $a + b$, except the case of $a = 2, b = 1, p = 3$. Moreover, $a^p - b^p$ has always a prime divisor which isn't divisor of $a-b$, except the case whent $a+b$ is a power of 2 and $p=2$. For the proof, we need the inequality, $\frac{a^p \pm b^p}{a \pm b} \geq \frac{a^3 \pm b^3}{a \pm b} = a(a \pm b) + b^2 \geq a \pm b$, just as above.

Now we start to deal with the problems.

Iterating problems

In some problems it would be useful to iterate. That is, repeating the form of the problem. For example, when we deal with $a^n - 1$, we can envisage forms like $a^a - 1, a^{a^a} - 1, \ldots$

Problem 1. Prove that there are infinitely many n, such that n divides $a^n - 1$.

Solution. We can construct those n by iterating as it follows:

$$n_1 = a - 1, n_{k+1} = a^{n_k} - 1.$$

Thus, we can easily find that;

$$n_1 | n_2 | \ldots\ldots n_k | n_{k+1} \ldots$$

Thus, $n_k | a^{n_k} - 1$.

Problem 2. Prove thst there are infinitely many composite n such that n divides $3^{n-1} - 2^{n-1}$.

Kvant M-1510

Solution. We continue iterating. Put $n = 3^p - 2^p$ for some prime $p \geq 5$. Then, p divides $n-1$. Thus we have

$$n = 3^p - 2^p | 3^{n-1} - 2^{n-1}.$$

But it seems hard to prove that $3^p - 2^p$ is composite for infinitely many p. We set $n = 3^m - 2^m$ and we will specify m later. We must have

$$n = 3^m - 2^m | 3^{n-1} - 2^{n-1}.$$

It is enough that m divides $n - 1 = 3^m - 2^m - 1$. Now, put $m = 2^k$ for some $k \geq 3$, thus

$$n - 1 = 3^{2^k} - 1 - 2^{2^k}.$$

It is clear that $v_2\left(3^{2^k} - 1 - 2^{2^k}\right) = v_2\left(3^{2^k} - 1\right) = k + 2$. Thus, $n - 1 = 2^{k+2} n_1$ for some odd n_1 Therefore,

$$n = 3^{2^k} - 2^{2^k} \left| 3^{2^{k+2} n_1} - 2^{2^{k+2} n_1} \right..$$

Moreover, $n = 3^{2^k} - 2^{2^k}$ is divisible by $3^{2^{k-1}} + 2^{2^{k-1}}$. Thus n is composite.

Problem 3. Prove that there are infinitely many composite n such that n divides $a^{n-1} - 1$.

Solution. Let $M = \frac{a^{a^{n^2}} - 1}{a^{a^n} - 1}$ for all $n \geq 4$. We have:

$$M - 1 = \frac{a^{a^{n^2}} - 1}{a^{a^n} - 1} - 1 = \frac{a^{a^{n^2}} - a^{a^n}}{a^{a^n} - 1}.$$

It is clear that a^{a^n} divides $M - 1$, That is,

$$M \left| a^{a^{n^2}} - 1 \right| a^{a^{a^n}} - 1 \left| a^{M-1} - 1. \right.$$

It suffices to prove that M is composite. Since $n^2 > n + 1$ we can find that $n^2 > n + 1$ for all $n \geq 4$, therefore, we find that $a^{a^{n+1}} - 1$ divides $a^{a^{n^2}} - 1$, so;

$$N = \frac{a^{a^{n+1}} - 1}{a^{a^n} - 1} \left| \frac{a^{a^{n^2}} - 1}{a^{a^n} - 1} \right. = M.$$

We are done.

Problem 4. Find for which integers $a > 1$ there are infinitely many square free integers n such that n divides $a^n - 1$.

Solution. If $a = 2$, then we should find all n such that $n|2^n - 1$. Choose an odd prime p, which we will specify later to divide n. Moreover, assume $\mathrm{ord}_{\mathrm{p}}^2 = k$. Thus, k divides $p - 1, n$, that is $k \leq p - 1$. Now assume that p is the least prime number that divides n. Hence n has a prime divisor less than p. which is absurd, unless $k = 1$ anf then p divides 1. Impossible. Assume now, $n > 2, a = 3$. Then we should find all n such that $n|3^n - 1$. Assume that p is the least odd prime divisor of n (such a prime exists, otherwise $n = 2$). Analogously to the above argumentation, we can find that $\mathrm{ord}_{\mathrm{p}}^2 = k - 1,2$. In both cases we have that $p = 2$, which is absurd.

Therefore, by Lemma 1 and Lema 2, since $a \geq 4$, put p_1 to be any divisors of $a - 1$. Then there is a prime number p_2 which divides $a^{p_1} - 1$ but it is not a divisor of $a - 1$. Therefore by Lemma 2 we find that $p_1 p_2 | a^{p_1} - 1 | a^{p_1 p_2} - 1$. Continuing this method, we will get a number $n = p_1 p_2 \dots . p_k$, such that $p_1 p_2 \dots . p_k$ divides $a^{p_1 p_2 \cdots p_k} - 1$.

More advanced problems

Problem 5. Prove that for any integers $a > b > 0$, there are infinitely many positive integers n, such that n divides $a^n + b^n$.

Solution. Let $a + b$ has a prime divisor p. Set $n = p^k$, then $p^{k+1}|a^{p^k} + b^{p^k}$. Now, if $a + b = 2^k$, then a, b are of the same parity and $v_2(a) = v_2(b) < k$. Hence, without loss of generality we can assume that a, b are both odd. Then $a^2 + b^2 \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 4)$, hence $a^2 + b^2$ has an odd prime divisor p. We can say that $2\, p^{k+1}|a^{2p^k} + b^{2p^k}$. Thus, $n = 2p^k$ works.

Second solution. If $a + b$ is odd, and n dibides $a^n + b^n$. We will construct an integer $m > n$ such that m divides $a^m + b^m$. For this reason, it is clear that $\frac{a^n + b^n}{n} > 1$ has a prime divisor p. Therefore, $pn|a^n + b^n|a^{pn} + b^{pn}$ and put $m = pn$. Now, if $a + b$ is even, we can reduce the problem to the case when a, b are odd (see the first solution). Now $\frac{a^2 + b^2}{2}$ is odd, hence there is an odd prime dividing $\frac{a^2 + b^2}{2}$. Consequently $2p|a^2 + b^2|a^{2p} + b^{2p}$ and it is enough to continue the above procedure.

Problem 6. Find all natural numbers $a > 1$, such that there are infinitely many n, for which n^2 divides $a^n - 1$.

Solution. It is clear that $a \neq 2$ (see problem 3). Now assume that $a \geq 3$. If $n^2|a^n - 1$, put $m = \frac{a^n - 1}{n}$. It is clear that $m > n$. We shall prove that m^2 divides $a^m - 1$. It is clear that n divides m. Now,

$$\frac{a^m - 1}{a^n - 1} = 1 + a^n + \cdots . + a^{m-n}.$$

Thus,

$$\frac{a^m - 1}{a^n - 1} \equiv \frac{m - n}{n} + 1 \equiv \frac{m}{n} \equiv \frac{a^n - 1}{n^2} (\bmod a^n - 1).$$

Hence, $\frac{a^m - 1}{a^n - 1} = (a^n - 1)k + \frac{a^n - 1}{n^2} = \frac{a^n - 1}{n^2}(1 + k.n^2)$. Therefore, $\frac{a^n - 1}{n^2} \Big| \frac{a^m - 1}{a^n - 1}$.

That is $(\frac{a^n - 1}{n})^2 \Big| a^m - 1$. We have that m^2 divides $a^m - 1$ and we are done.

Second solution. Take a prime divisor p of $a - 1$. It is clear that p^2 divides $a^p - 1$. Moreover, there is a prime divisor $q \neq p$ such that $p^2 q$ divides $a^p - 1$. Hence, $p^2 q^2$ divides

$a^{pq}-1$. Continuing this procedure, we can obtain the number $n=p_1p_2\ldots .p_k$, where $p_1<p_2<\cdots .<p_k$ are different prime numbers and n^2 divides a^n-1.

Problem 7. Prove that there are infinitely many integer n such that n^2 divides
$$1+2^n+3^n+6^n.$$
Solution. We must find infinitely many integers n, such that n^2 divides $(1+2^n)(1+3^n)$. It is clear that n is odd, otherwise $1+3^n\equiv 2(\bmod 8)$. Assume now, that $(1+2^{n_k})(1+3^{n_k})=4kn_k^2$, where k,n_k are odd and $k>1$. Choose a prime $p|k$ and define $n_{k+1}=pn_k$. Now, it is easy to check that:
$$(1+2^{n_{k+1}})=(1+2^{n_k})x_k,(1+3^{n_{k+1}})=(1+3^{n_k})y_k.$$
Therefore,
$$(1+2^{n_{k+1}})(1+3^{n_{k+1}})=(1+2^{n_k})(1+3^{n_k})x_ky_k=4kx_ky_kn_k^2.$$
It is clear that p divides at least one of $(1+2^{n_k}),(1+3^{n_k})$ and consequently p^2 divides one of $(1+2^{n_{k+1}}),(1+3^{n_{k+1}})$. That is, $p|x_ky_k$. Hence,
$$(1+2^{n_{k+1}})(1+3^{n_{k+1}})=4\left(\frac{kx_ky_k}{p^2}\right)(p^2n_k^2)=4\left(\frac{kx_ky_k}{p^2}\right)n_{k+1}^2.$$
We are done.

Second solution. Put $n=3k$. Then we can reduce the problem to finding infinitely many n such that k^2 divides $1+27^k$, because $1+2^{3k}$ is divisible by 9. Now, take an odd prime divisor of $1+27=28$, i.e. 7. We find that there is a prime divisor $q\neq 7$, dividing $1+27^7$. Thus, $(7q)^2$ divides $1+27^{7q}$. Continuing this procedure, we find a number $n=21p_1\ldots p_t$, $7<p_1<\cdots<p_t$ such that n^2 divides $1+2^n+3^n+6^n$.

Problem 8. For which pairs (a,b) of positive integers there are infinitely many n such that n^2 divides a^n+b^n?

AMM-11587

Solution. If $\gcd(a,b)=d>1$ then $(d^k)^2$ divides $a^{d^k}+b^{d^k}$. Hence, it is enough to suppose that $\gcd(a,b)=1$. If $a+b>3$, then a^p+b^p has an odd prime factor, which doesn't divide $a+b$. Now, assume that $a+b$ has odd divisors. Put an odd prime p_1. Then p_1^2 divides $a^{p_1}+b^{p_1}$. Now, there is a prime number $p_2\neq p_1$, dividing $a^{p_1}+b^{p_1}$, hence $p_1^2p_2^2$ divides $a^{p_1p_2}+b^{p_1p_2}$ and etc….
If $a+b=3$, we can assume that $a=2,b=1$. Therefore, we may examine whether there are infinitely many n, such that n^2 divides $1+2^n$ or not? Let p be the smallest prime dividing n. It is easy to find that $2^{2n}\equiv 1 \pmod p$. Thus $2^{\gcd(2n,p-1)}\equiv 1 \pmod p$, but $\gcd(2n,p-1)=2$. Hence $p=3$. Therefore, $3^{2v_3(n)}\big|1+2^n$. Thus,
$$2v_3(n)\leq v_3(1+2^n)=1+v_3(n).$$
That is, $v_3(n)=1$. Now write $n=3n_1$ where n_1 is not divisible by 3. Hence, n_1^2 divides $8^{n_1}+1$. Let q be the smallest prime divisor of n_1. We can easily find that $\gcd(q-1,2n_1)=2$. That is, $8^2\equiv 1 \pmod q$. Then $q=7$. But, $8^{n_1}+1\equiv 2 \pmod 7$.

Finally, if $a+b=2^s,\gcd(a,b)=1$, then a,b are both odd. Hence $a^2,b^2\equiv 1 \pmod 4$, so n cannot be even. If n is an odd number, considering the same approach as above, we find that $a^2\equiv b^2 \pmod p$, where p is the least odd prime divisor of n. Hence, $a\equiv b \pmod p$. But then $0\equiv a^n+b^n\equiv 2a^n \pmod p$. Therefore, $a\equiv b\equiv 0 \pmod p$. We get a contradiction to the fact that $\gcd(a,b)=1$.

Variant: For which integers $a>1$, there are infinitely many integer n^2 such that n divides a^n+1.

Problem 9. Prove that for each positive integer k there exists an integer n which has exactly k prime divisors and $\frac{2^{n^2}+1}{n^3}$ is an integer.

Solution. By lemma 1 we find that if $p|2^m+1$, then $p^3|2^{mp^2}+1$. Now take $n_1=p_1=3$. Since $2^9+1=513=27.19$, take $p_2=19$, $n_2=p_1p_2$. We construct n_i inductively. Assume that we have constructed $n_k=p_1p_2\dots p_k$. By lemma 2 there is a prime p_{k+1} such that $p_{k+1}\nmid 2^{p_1p_2\dots p_{k-1}}+1=a+1$ but $p_{k+1}|2^{p_1p_2\dots p_k}+1=a^{p_k}+1$. Now set $n_{k+1}=p_{k+1}n_k$. Since $n_k^3|2^{n_k^2}+1|2^{n_k^2.p_{k+1}^2}+1$ and by lemma 1 $p_{k+1}^3|\,2^{n_k^2.p_{k+1}^2}+1$ we find that $n_k^3p_{k+1}^3=n_{k+1}^3|2^{n_k^2.p_{k+1}^2}+1=2^{n_{k+1}^2}+1$. We are done.

REFERENCES

Grozdev, S. (2007). *For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice)*. Sofia: ADE. (ISBN 978-954-92139-1-1), 295 pages.

Въпрос: Вярно ли е, че числото 2^a е ирационално за всяко a, което не е цяло?
Отговор: Не е вярно. Числото $a=\log_2 3$ не е цяло, но $2^{\log_2 3}=3$ е дори цяло и в частност не е ирационално.
Твърдение: Числото 2^a е ирационално за всяко рационално число a, което не е цяло.
Доказателство: Нека a и b са естествени числа и нека числото $\sqrt[a]{b}$ е рационално, т.е. $\sqrt[a]{b}=\frac{p}{q}$, където p и q са цели взаимнопрости числа. Тогава $b=\left(\frac{p}{q}\right)^a=\frac{p^a}{q^a}$ е цяло число. Оттук следва, че q^a дели p^a. Но след като q^a и p^a нямат общ прост делител, заключаваме, че $q^a=1$ и следователно $q=1$. Тогава $\sqrt[a]{b}$ е цяло число. Получихме, че $\sqrt[a]{b}$ е или цяло число, или ирационално, т.е. всеки цял корен от цяло число е цяло или ирационално число. В частност $\sqrt[q]{2^p}$, т.е. $2^{\frac{p}{q}}$ е цяло или ирационално число за произволни естествени числа p и q. Разбира се, то е цяло, ако 2^p е точна q-та степен на цяло число, т.е. ако p е кратно на q и значи $\frac{p}{q}$ е цяло число. Доказаното лесно се разширява и за отрицателни рационални числа, т.е. и в случая, когато p и q са произволни цели числа, а не само естествени. За целта е достатъчно да забележим, че реципрочното не едно ирационално число и също ирационално.

С помощта на по-сложна техника може да се докаже и още нещо. Съгласно теоремата на Gelfond-Schneider числото 2, повдигнато на степен, която е алгебрично число, е трансцендентно число (в частност ирационално). Да припомним, че едно число е алгебрично, когато е корен на полином с рационални коефициенти, а едно число е трансцендентно, когато не е корен на такъв полином.

ЧИСЛА, КОИТО СА СУМА ОТ КУБОВЕТЕ НА ЦИФРИТЕ СИ

проф. Сава Гроздев, доц. Веселин Ненков

Естествените числа притежават разнообразни свойства, свързани със съставящите ги цифри. В настоящата статия си поставяме задачата да определим числата, които са равни на сумата от кубовете на цифрите си. Тази задача ще решим, като разгледаме числата според броя на цифрите им.

1. Числа с не по-малко от пет цифри. Нека N е число с поне пет цифри, т.е. $N=10^n.a_n+10^{n-1}.a_{n-1}+\dots+10^2.a_2+10^1.a_1+a_0$ и $a_n\neq 0$, $n\geq 4$. Разглеждаме разликата

$$N-\left(a_n^3+a_{n-1}^3+\dots+a_2^3+a_1^3+a_0^3\right)=$$
$$=\left(10^n-a_n^2\right)a_n+\left(10^{n-1}-a_{n-1}^2\right)a_{n-1}+\dots+\left(10^2-a_2^2\right)a_2+\left(10-a_1^2\right)a_1+\left(1-a_0^2\right)a_0.$$

Тъй като $n\geq 4$, то $10^n\geq 10000$. Затова $10^n-a_n^2\geq 10000-81=9919$. Освен това $\left(10-a_2^2\right).a_2\geq\left(10-9^2\right).9=-639$ и $\left(1-a_0^2\right)a_0\geq -80.9=-720$. Тогава

$$\left(10^n-a_n^2\right)a_n+\left(10-a_1^2\right)a_1+\left(1-a_0^2\right)a_0\geq 9919-639-720=8560>0.$$

От друга страна всички събираеми в сумата $\left(10^{n-1}-a_{n-1}^2\right)a_{n-1}+\dots+\left(10^2-a_2^2\right).a_2$ са неотрицателни и затова цялата сума е неотрицателна. Следователно $N-\left(a_n^3+a_{n-1}^3+\dots+a_2^3+a_1^3+a_0^3\right)>0$. Това означава, че не съществува число с повече от четири цифри, което е равно на сумата от кубовете на цифрите си.

2. Четирицифрени числа. Нека $N=\overline{abcd}$ е четирицифрено число, равно на $a^3+b^3+c^3+d^3$. Тъй като $N\leq 9999$ и $9^3+9^3+9^3+9^3=2916$, то първата цифра a на N може да приема само стойности, които са равни на 1 и 2.

Ако $a=2$, като вземем предвид неравенствата $\left(100-b^2\right)b>0$, $\left(10-c^2\right)c\geq -639$ и $\left(1-d^2\right)d\geq -720$ (получават се както е показано по-горе), получаваме

$$N-\left(a^3+b^3+c^3+d^3\right)=\left(1000-a^2\right)a+\left(100-b^2\right)b+\left(10-c^2\right)c+\left(1-d^2\right)d=$$
$$=1992+\left(10-c^2\right)c+\left(1-d^2\right)d+\left(100-b^2\right)b>1992+0-639-720=633>0.$$

Следователно не съществува четирицифрено число N с желаното свойство, когато първата му цифра е $a=2$.

Случаят, когато $a=1$, разглеждаме, като фиксираме две от цифрите b, c и d, а на третата даваме стойност между 0 и 9. Когато една от цифрите b, c и d е 9, а друга е 9, 8, 7 или 6, резултатите, според третата от тях, са подредени в следващите четири таблици:

Две от цифрите b, c и d са 9 и 9										
Четвърта цифра	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
$a^3+b^3+c^3+d^3$	2188	1971	1802	1675	1584	1523	1486	1467	1460	1459

Две от цифрите b, c и d са 9 и 8									
Четвърта цифра	8	7	6	5	4	3	2	1	0
$a^3+b^3+c^3+d^3$	1754	1585	1458	1367	1306	1269	1250	1243	1242

Две от цифрите b, c и d са 9 и 7								
Четвърта цифра	7	6	5	4	3	2	1	0
$a^3+b^3+c^3+d^3$	1416	1289	1198	1137	1100	1081	1074	1073

Две от цифрите b, c и d са 9 и 6				
Четвърта цифра	6	5	4	≤ 3
$a^3+b^3+c^3+d^3$	1162	1071	1010	≤ 973

От тези таблици се вижда, че не се получава число с желаното свойство, когато една от цифрите b, c и d е 9, втората е не по-малка от 6, а третата се изменя между 0 и 9. Освен това, ако една от цифрите b, c и d е 9, а останалите две не надминават 5, имаме $a^3+b^3+c^3+d^3 \le 1^3+9^3+5^3+5^3=980$. Това означава, че в тези случаи се получава трицифрено число. Следователно, когато поне една от цифрите b, c и d е 9, не съществува четирицифрено число N с желаното свойство.

Когато една от цифрите b, c и d е 8, а друга е 8 или 7, резултатите, според третата от тях, са подредени в следващите две таблици:

Две от цифрите b, c и d са 8 и 8									
Четвърта цифра	8	7	6	5	4	3	2	1	0
$a^3+b^3+c^3+d^3$	1537	1368	1241	1150	1089	1052	1033	1026	1025

Две от цифрите b, c и d са 8 и 7			
Четвърта цифра	7	6	≤ 5
$a^3+b^3+c^3+d^3$	1199	1072	≤ 981

От тези таблици се вижда, че не се получава число с желаното свойство, когато една от цифрите b, c и d е 8, втората е не по-малка от 7, а третата се изменя между 0 и 8. Освен това, ако една от цифрите b, c и d е 8, а останалите две не надминават 6, имаме $a^3+b^3+c^3+d^3 \le 1^3+8^3+6^3+6^3=945$. Това означава, че в тези случаи се получава трицифрено число. Следователно, когато поне една от цифрите b, c и d е 8, не съществува четирицифрено число N с желаното свойство.

Ако $b=c=d=7$, получаваме $a^3+b^3+c^3+d^3=1030$, което очевидно не е решение на поставената задача. Когато две от цифрите b, c и d не надминават 7, а третата не надминава 6, получаваме $a^3+b^3+c^3+d^3 \le 1^3+7^3+7^3+6^3=903$. Това означава, че в тези случаи се получава най-много трицифрено число. Следователно, когато цифрите b, c и d не надминават 7, не съществува четирицифрено число N с желаното свойство.

От последните наблюдения получаваме, че не съществува четирицифрено число N с желаното свойство, когато първата му цифра е $a=1$. Така от направените изследвания върху четирицифрените числа следва, че не съществува четирицифрено число N, което е равно на сумата от кубовете на цифрите си.

3. Трицифрени числа. Нека $N=\overline{abc}$ е трицифрено число, равно на $a^3+b^3+c^3$. Ако една от цифрите b и c е равна на 9, като вземем предвид, че $9^3=729$, то за първата цифра на N е изпълнено $a \ge 7$. Тогава $a^3+b^3+c^3 > 7^3+9^3=1241$, което означава, че в тези случаи не се получава трицифрено число. Ако една от цифрите b и c е равна на 8, като вземем предвид, че $8^3=512$, то за първата цифра на N са изпълнени неравенствата $5 \le a \le 7$ (ако $a=8$ или $a=9$, сумата $a^3+b^3+c^3$ е четирицифрено число). При $a=5$, $a=6$ и $a=7$ получаваме съответно неравенствата $a^3+b^3+c^3 > 5^3+8^3=637$, $a^3+b^3+c^3 > 6^3+8^3=728$ и $a^3+b^3+c^3 > 7^3+8^3=855$, което означава, че в съответните случаи имаме $a \ge 6$, $a \ge 7$ и $a \ge 8$. Тези неравенства противоречат на съответните равенства, които сме предположили за цифрата a. От извършените наблюдения стигаме до извода, че $b \le 7$ и $c \le 7$.

В зависимост от първата цифра a на числото N разглеждаме по отделно възможните девет случая.

1) При $a=9$ различните възможности обединяваме в четири случая. В първия случай разглеждаме $b \le 4$ и $c \le 4$. Тогава $a^3+b^3+c^3 \le 9^3+4^3+4^3=857$ и не се получава решение на задачата. Следващите два случая са отразени в следните две таблици:

$a=9$ и една от цифрите b и c е 5				
Трета цифра	≤ 3	4	5	≥ 6
$a^3+b^3+c^3$	≤ 881	918	979	≥ 1070

$a=9$ и една от цифрите b и c е 6					
Трета цифра	0	1	2	3	≥ 4
$a^3+b^3+c^3$	945	946	953	972	≥ 1009

От нанесените в таблиците резултати се вижда, че и в тези случаи не се получава решение на задачата. Накрая отбелязваме, че, когато $b=7$ или $c=7$, имаме $a^3+b^3+c^3 \geq 9^3+7^3=1072$, което води до четирицифрено число и отново не се получава решение. Следователно при $a=9$ не съществува число с желаното свойство.

2) При $a=8$ различните възможности обединяваме в три случая. В първия случай разглеждаме $b \leq 5$ и $c \leq 5$. Тогава $a^3+b^3+c^3 \leq 8^3+5^3+5^3=762$ и не се получава решение на задачата. Следващите два случая са отразени в следващите две таблици:

$a=8$ и една от цифрите b и c е 6			
Трета цифра	≤ 4	5	≥ 6
$a^3+b^3+c^3$	792	853	≥ 944

$a=8$ и една от цифрите b и c е 7					
Трета цифра	0	1	2	3	≥ 4
$a^3+b^3+c^3$	855	856	863	882	≥ 919

От нанесените в таблиците резултати се вижда, че и в тези случаи не се получава решение на задачата. Следователно при $a=8$ не съществува число с желаното свойство.

3) При $a=7$ различните възможности обединяваме в три случая. В първия случай разглеждаме едната от цифрите b и c да не надминава 6, а другата да ненадминава 5. Тогава $a^3+b^3+c^3 \leq 7^3+6^3+5^3=684$ и не се получава решение на задачата. Във втория случай разглеждаме $b=c=6$. Тогава $a^3+b^3+c^3=7^3+6^3+6^3=775$, което не е решение на задачата. Третият случай е отразен в следващата таблица:

$a=7$ и една от цифрите b и c е 7				
Трета цифра	≤ 2	3	4	≥ 5
$a^3+b^3+c^3$	694	713	750	≥ 811

От нанесените в таблицата резултати се вижда, че и в този случаи не се получава решение на задачата. Следователно при $a=7$ не съществува число с желаното свойство.

4) При $a=6$ различните възможности обединяваме в три случая. В първия случай разглеждаме едната от цифрите b и c да не надминава 6, а другата да ненадминава 5. Тогава $a^3+b^3+c^3 \leq 6^3+6^3+5^3=557$ и не се получава решение на задачата. Във втория случай разглеждаме $b=c=6$. Тогава $a^3+b^3+c^3=6^3+6^3+6^3=648$, което не е решение на задачата. Третият случай е отразен в следващата таблица:

	$a=6$ и една от цифрите b и c е 7			
Трета цифра	≤ 3	4	5	≥ 6
$a^3+b^3+c^3$	586	623	684	≥ 776

От нанесените в таблицата резултати се вижда, че и в този случаи не се получава решение на задачата. Следователно при $a=6$ не съществува число с желаното свойство.

5) При $a=5$ различните възможности обединяваме в три случая. В първия случай разглеждаме едната от цифрите b и c да не надминава 6, а другата да ненадминава 5. Тогава $a^3+b^3+c^3 \le 5^3+6^3+5^3=466$ и не се получава решение на задачата. Във втория случай разглеждаме $b=c=6$. Тогава $a^3+b^3+c^3=5^3+6^3+6^3=557$, което не е решение на задачата. Третият случай е отразен в следващата таблица:

$a=5$ и една от цифрите b и c е 7				
Трета цифра	≤ 3	4	5	≥ 6
$a^3+b^3+c^3$	≤ 495	532	593	≥ 684

От нанесените в таблицата резултати се вижда, че и в този случаи не се получава решение на задачата. Следователно при $a=5$ не съществува число с желаното свойство.

6) При $a=4$ различните възможности обединяваме в четири случая. В първия случай разглеждаме $b\le 4$ и $c\le 4$. Тогава $a^3+b^3+c^3 \le 4^3+4^3+4^3=192$ и не се получава решение на задачата. Останалите три случая са отразени в следващите три таблици:

$a=4$ и една от цифрите b и c е 5			
Трета цифра	≤ 5	6	7
$a^3+b^3+c^3$	≤ 314	405	532

$a=4$ и една от цифрите b и c е 6				
Трета цифра	≤ 4	5	6	7
$a^3+b^3+c^3$	≤ 344	405	496	623

$a=4$ и една от цифрите b и c е 7						
Трета цифра	0	1	2	3	4	≥ 5
$a^3+b^3+c^3$	407	408	415	434	471	≥ 532

От нанесените в първите две таблици резултати се вижда, че в тези два случая не се получава решение на задачата. От третата таблица се вижда, че в последния случай се получава само едно решение на задачата, което е 407 и се съдържа в първия стълб на таблицата. Следователно при $a=4$ единственото число с желаното свойство е 407.

7) При $a=3$ различните възможности обединяваме в три случая. В първия случай разглеждаме $b\le 5$ и $c\le 5$. Тогава $a^3+b^3+c^3 \le 3^3+5^3+5^3=277$ и не се получава решение на задачата. Останалите два случая са отразени в следващите две таблици:

$a=3$ и една от цифрите b и c е 6

Трета цифра	≤ 3	4	5	≥ 6
$a^3+b^3+c^3$	270	307	368	≥ 459

$a=3$ и една от цифрите b и c е 7					
Трета цифра	0	1	2	3	≥ 4
$a^3+b^3+c^3$	370	371	378	397	≥ 434

От първата таблица се вижда, че в този случай не се получава решение на задачата. От втората таблица се вижда, че в последния случай се получават две решения на задачата, които са 370 и 371. Те се съдържат в първия и втория стълб на таблицата. Следователно при $a=3$ съществуват точно две числа 370 и 371 с желаното свойство.

8) При $a=2$ различните възможности обединяваме в три случая. В първия случай разглеждаме едната от цифрите b и c да не надминава 5, а другата да ненадминава 4. Тогава $a^3+b^3+c^3 \le 3^3+5^3+4^3=197$ и не се получава решение на задачата. Във втория случай разглеждаме $b=c=5$. Тогава $a^3+b^3+c^3=3^3+5^3+5^3=258$, което не е решение на задачата. В третия случай разглеждаме едната от цифрите b и c да не е по-малка от 5, а другата да не е по-малка от 6. Тогава $a^3+b^3+c^3 \ge 3^3+5^3+6^3=349$ и не се получава решение на задачата. Следователно при $a=2$ не съществува число с желаното свойство.

9) При $a=1$ различните възможности обединяваме в три случая. В първия случай разглеждаме едната от цифрите b и c да не надминава 3, а другата да ненадминава 4. Тогава $a^3+b^3+c^3 \le 1^3+3^3+4^3=92$ и не се получава решение на задачата. Във втория случай разглеждаме $b=c=4$. Тогава $a^3+b^3+c^3=1^3+4^3+4^3=129$, което не е решение на задачата. Третият случай е отразен в следващата таблица:

$a=1$ и една от цифрите b и c е 5						
Трета цифра	0	1	2	3	4	≥ 5
$a^3+b^3+c^3$	126	127	134	153	190	≥ 251

От последната таблица се вижда, че в този случай се получава само едно решение на задачата, което е 153 и се съдържа в четвъртия стълб на таблицата. Накрая отбелязваме, че, когато една от цифрите b и c надминава 6, имаме $a^3+b^3+c^3 \ge 1^3+6^3=217$, което отново не води до решение. Следователно при $a=1$ единственото число с желаното свойство е 153.

Така от направените изследвания върху трицифрените числа следва, че съществуват точно четири трицифрени числа N, които са равни на сумата от кубовете на цифрите си. Тези числа са: 153, 370, 371 и 407.

4. Двуцифрени числа. Нека $N=\overline{ab}$ е двуцифрено число, равно на a^3+b^3. Ако една от цифрите a и b е не по-малка от 5, числото a^3+b^3 е трицифрено. Ако $a=b=4$

, то $a^3+b^3=128$ и отново се получава трицифрено число. Ако една от цифрите a и b не надминава 2, а другата не надминава 1, то $a^3+b^3\le 9$ и получаваме едноцифрено число. Остава да разгледаме случаите $0^3+3^3=27$, $0^3+4^3=64$, $1^3+3^3=28$, $1^3+4^3=65$, $2^3+3^3=35$, $2^3+4^3=72$ и $3^3+4^3=91$. От всички тези наблюдения следва, че не съществува двуцифрено N число, което е равно на сумата от кубовете на цифрите си.

Накрая трябва да отбележим, че от едноцифрените числа само за числото 1 е изпълнено равенството $1=1^3$. Следователно *всички числа, които са равни на сумата от кубовете на цифрите си, са*: 1, 153, 370, 371 *и* 407.

5. Няколко свойства на трицифрените числа. Числата 153, 370, 371 и 407 се представят чрез равенствата $153=3^2.17$, $370=2.5.37$, $371=7.53$ и $407=11.37$. Следователно тези числа са съставни. Числата 153 и 370 могат да се представят като суми от два квадрата по единствен начин: $153=3^2+12^2$ и $370=9^2+17^2$. Числата 371 и 407 не могат да се представят като суми от два квадрата, но 371 се представя като суми от три квадрата: $371=1^2+9^2+17^2=5^2+11^2+15^2=9^2+11^2+13^2$, а 407 – като суми от четири квадрата: $407=1^2+3^2+6^2+19^2=1^2+6^2+9^2+17^2=3^2+9^2+11^2+14^2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Харди, Г. ((984). *Апология на математика*. Софиа: Наука и изкуство.
2. Хонсбъргър, Р. *Остроумието в математиката*. София: Наука и изкуство.
3. Grozdev, S. (2007). *For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience* (*Theory and Practice*). Sofia: ADE, ISBN978-954-92139-1-1.

NUMBERS, EQUAL TO THE SUM OF THE CUBES OF THEIR DIGITS

Prof. Sava Grozdev, Assoc. Prof. Veselin Nenkov

Abstract. The positive integers have varied properties, which are connected with the digits that compose them. The aim of the present paper is determine the positive integers, equal to the sum of the cubes of their digits. The problem is solved considering the number of the digits that compose them.

Prof. Sava Grozdev, DSc
VUZF University
1, Gusla Str.
1618 Sofia, Bulgaria
E-mail: sava.grozdev@gmail.com

Dr. Veselin Nenkov, Assoc. Prof.
Nikola Vaptsarov Naval Academy
73, Vasil Drumev Str.
Varna, Bulgaria
E-mail: vnenkov@mail.bg

M + ЛЮБОПИТНИ ФАКТИ

ЧИСЛОТО 144

В текста по-долу става дума за естествени числа, в частност за числото 144. Това число е забележително. То е точен квадрат, а именно $144 = 12^2$. Но това не е единствената причина да се счита за забележително. Ще изброим няколко негови свойства, започвайки с вече споменатото:

1. $144 = 12^2$, т.е. 144 е точен квадрат;

2. сборът от цифрите на 144 е също точен квадрат $1 + 4 + 4 = 9 = 3^2$;

3. произведението от цифрите на 144 е точен квадрат $1.4.4 = 16 = 4^2$;

4. огледалното число на 144, т.е. числото, образувано със същите цифри, но в обратен ред, е точен квадрат $441 = 21^2$;

5. $144 = 12^2$ и $441 = 21^2$, като в същото време 12 и 21 са огледални едно на друго или с други думи квадратните корени от 144 и неговото огледално са огледални едно на друго;

6. 144 е член на редицата на Фибоначи: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144;

7. 144 е равно на квадрата на своя Фибоначи индекс, т.е. на своя пореден номер в редицата на Фибоначи (144 е 12-то поред в редицата на Фибоначи);

8. броят на делителите на 144 е равен на 15: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 36, 48, 72, 144, като 144 е на-малкото число с точно 15 делителя;

9. 144 е сбор на две прости числа-близнаци, т.е. $144 = 71 + 73$;

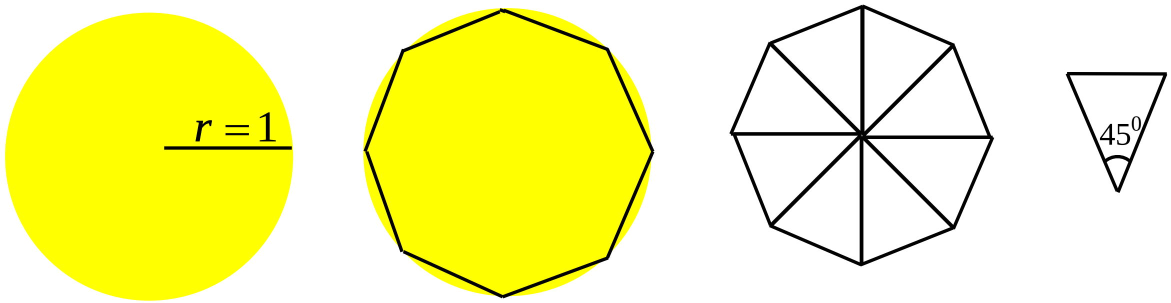
10. 144 с дели на сбора на своите цифри, както и на произведението на цифрите си, т.е. $144 = 9.16$. Число, което се дели на сбора на цифрите си, се нарича *харшад*-*число* или *нивен*-*число* (**harshad number** или **niven number**). Следователно 144 е харщад-число. Харшард-числата са въведени от индийския математик D. R. Kaprekar (1905 – 1986), а наименованието *харшад*-*число* произлиза от думата „харшад”, която на санскрит означава „даващ радост” (*харша* = радост + *да* = давам). Терминът *нивен*-*число* носи името на американския математик от канадски произход Иван Нивен (1915 – 1999) във връзка с негов доклад на конференция по теория на числата през 1977 г.

11. Тъй като $\varphi(144) = 48$, където φ е функцията на Ойлер, то 144 се дели на $\varphi(144)$, т.е. на броя на простите числа, ненадминаващи 144, които са взаимнопрости с 144. Тук използвахме, че $\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)...\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$, където $n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} ... p_k^{n_k}$ е разлагането на прости множители на числото n съгласно основната теорема на аритметиката.

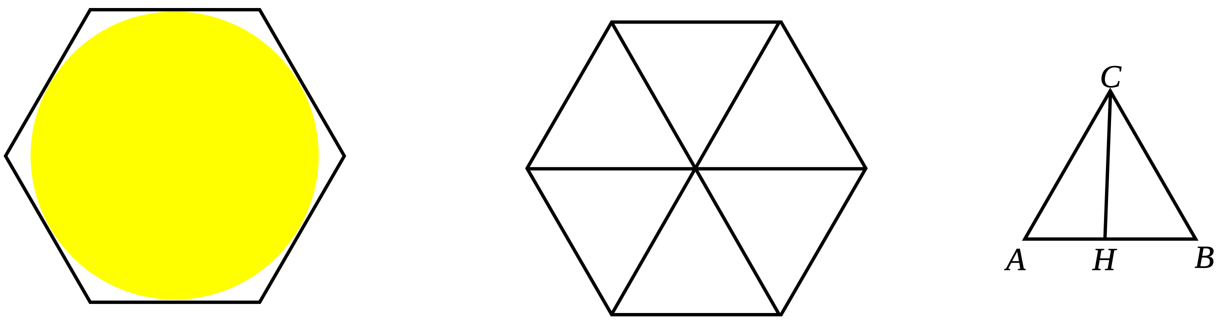
12. 144 е максималната стойност на детерминантите на 9×9 матриците, съставени от нули и единици. Стойността е свързана с т. нар. проблем за максимума на френския математик Жак Адамар (1865 – 1963).

ОЩЕ ЕДНО ПРИБЛИЖЕНИЕ НА „ПИ”

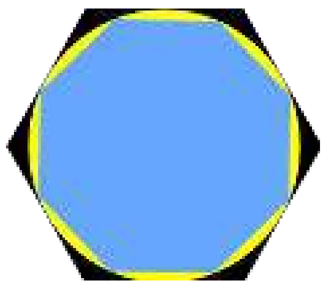
Кръг с радиус $r=1$ има лице, равно на π. Това следва от формулата за лице на кръг, т.е. $\pi r^2 = \pi$, откъдето $r^2 = 1$ и следователно $r = 1$. Да впишем в този кръг правилен осмоъгълник. Той е съставен от 8 равнобедрени триъгълника с бедро 1 и ъгъл при върха, равен на 45^0. Лицето на такъв триъгълник е $\frac{1.1.\sin 45^2}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ и следователно лицето на осмо-



ъгълника е $8\cdot\frac{\sqrt{2}}{4} = 2\sqrt{2}$. Сега да опишем правилен шестоъгълник около кръга. Той е съставен от 6 еднакви равностранни триъгълника с височина 1. Нека ABC е един такъв триъгълник и да означим дължината на страната му с $2x$. За височината CH ($H \in AB$) е изпълнено $CH = 1$. Тъй като $AH = \frac{1}{2}AB = x$, от правоъгълния триъгълник AHC имаме



$4x^2 = x^2 + 1$. Оттук $3x^2 = 1$ и $x^2 = \frac{1}{3}$, т.е. $x = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ и $AB = 2x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. За лицето на триъгълника намираме $\frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{12}{9}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ и лицето на шестоъгълника е $6\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$. Средното аритметично на лицата на осмоъгълника и шестоъгълника е $\frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{2}+\sqrt{3}$. На чертежа вдясно първоначалният кръг е оцветен в жълто,



вписаният осмоъгълник е в синьо, а описаният шестоъгълник е в черно. Очевидно стойността на лицето на кръга е между стойностите на лицата на осмоъгълника и шестоъгълника,. Затова можем да считаме, че то е близо до тяхното средно аритметично, т. е. $\sqrt{2}+\sqrt{3} \approx \pi$.