01

Ако кандидатствате след 7 клас

02

Ако кандидатствате във ВУЗ

03

Олимпиади + Подготовка

04

Издирване на таланти уМ+

05

Конкурси

06

М+ Семинар

М+

помагало за математика и информатика

3/4 2018

национален конкурс уМ+ издирване на таланти

М+ е одобрено от МОН за класна и извънкласна работа по математика и информатика

МАТЕМАТИКА ПЛЮС
гр. София, 1618, кв. "Овча купел"
ул."Гусла" №1
тел: +359 2 401 58 12, факс: +359 2 401 58 21
e-mail: office@vuzf.bg
www.vuzf.bg

ВУЗФ
Университет по финанси, бизнес и предприемачество

PER ASPERA AD ASTRA
2002

ISSN 0861-8321 (print)
ISSN 2603-4964 (on line)

Цена 7 лв.

МАТЕМАТИКА +

МАТЕМАТИКА ПЛЮС

п о м а г а л о   п о   м а т е м а т и к а   и   п р и л о ж е н и я

одобрено от Министерството на образованието и науката за класна и извънкласна работа

Quarterly, Volume 26 (103-104), Number 3-4, 2018

Помагалото се издава от
ВУЗФ – Университет по финанси, бизнес и предприемачество

Адрес на редакцията:
ВУЗФ, стая 409
ул. „Гусла" № 1, 1618 София
тел. 02-40-15-830; e-mail: sava.grozdev@gmail.com

Материали за публикуване изпращайте в два екземпляра до редакцията или до член на редакционната колегия на горния адрес. Препоръчително е ръкописите да не надвишават 6 страници. Желателно е използването на електронни носители (в такива случаи да се посочва използваният софтуер). Илюстрациите и чертежите в текста да се представят на отделен лист. Ръкописи не се връщат.

Формат $600 \times 840/8$ Печатни коли 8 **ISSN 2603-4964** (онлайн)
Дадена за публикуване на 13.12. 2018 Публикуване на 27. 12. 2018 **ISSN 0861-8321** (книжен вариант)

MATHEMATICS PLUS

HANDBOOK FOR MATHEMATICS AND ITS APPLICATIONS

approved by the Ministry of Education and Science
for class and extracurricular activities

Quarterly, Volume 26 (103-104), Number 3-4, 2018

The journal is edited by

VUZF – University for Finance, Business and Entrepreneurship

Address of the Editorial Boards:
VUZF, Room 409
1 Gusla Street, 1618 Sofia
Tel. 02-40-15-830; e-mail: sava.grozdev@gmail.com

Materials for publication should be sent in two copies to the Editorial Board or to a member of the Board using the address above. It is recommended that each material contains no more than 6 pages. Submitting an electronic version together with the paper copy is desirable (the corresponding software should be indicated in such a case). Illustrations and figures should be submitted separately. Sent materials would not be returned.

Format $600 \times 840/8$	Printed sheets 8	**ISSN 2603-4964** (online)
Prepared for printing on 13.12. 2018	Printed on 27. 12. 2018	**ISSN 0861-8321** (printed)

Mathematics Plus
issue 3–4, 2018

MATHEMATICS PLUS is a handbook for kids, pupils, school and university students, professional mathematicians, for all, who have enjoyed the beauty of Mathematics or strive to touch it. In a popular, attractive and approachable way the journal publishes notes and articles with original results, reviews on subjects with considerable importance for Mathematics and its applications; famous mathematicians and their achievements are presented; information is proposed for Bulgarian and foreign schools, colleges, universities, foundations; materials by outstanding experts are elaborated to help acceptance in higher educational institutions, foreign language schools, mathematical and professional lyceums; International and Balkan Mathematical Olympiads, various other mathematical competitions in Bulgaria and abroad are discussed; different contests with awards are organized; special attention is directed to youngsters suggesting suitable topics and tasks to them; professionals with achievements in Mathematics but also in other domains are presented; mathematical puzzles, magic squares, challenging games and toys are proposed; lotteries with object awards are organized.

IN THIS ISSUE:

ISSN 0861-8321 (printed) **ISSN 2603-4964 (online)**

Математика плюс
бр. 3–4, 2018

МАТЕМАТИКА ПЛЮС е помагало за деца, ученици, студенти, професионални математици, за всеки, който се е наслаждавал на красотата на математиката или се стреми да я докосне. В популярна, привлекателна и достъпна форма се публикуват съобщения и статии с оригинални резултати, обзори на важни за математиката и приложенията направления; представят се известни математици и техните постижения; дава се информация за български и чужди училища, колежи, университети, фондации; предлагат се материали от изтъкнати специалисти за кандидатстващите във висшите учебни заведения, езикови училища, математически и професионални гимназии; отразяват се международните олимпиади и балканиади и математически състезания у нас и в чужбина; организират се конкурси с награди; специално място се отделя на най-малките с подходящи теми и задачи; представят се професионални математици, които освен в математиката имат постижения и в други области; предлагат се математически ребуси, магически квадрати, интересни игри и играчки; организират се томболи с предметни награди.

В БРОЯ:

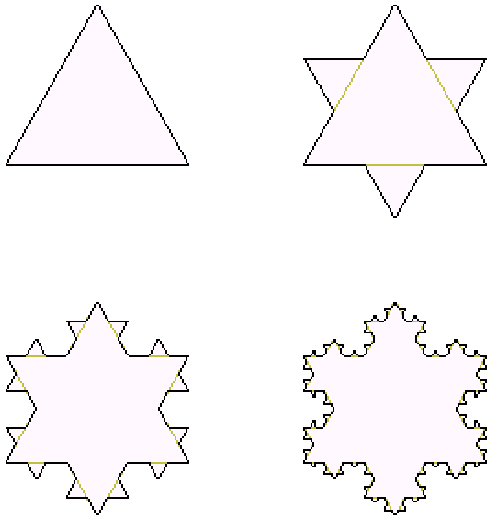
Драги читатели,

В математиката са известни редица задачи, които се формулират изключително лесно и разбираемо, но чиито решения са или неизвестни досега, или решаването им е било придружено с преодоляването на значителни трудности. Сред нерешените задачи е т. нар. хипотеза на Голдбах (Кристиан Голдбах (1690–1764) е немски математик), която гласи, че всяко четно число, по-голямо от 2, може да се представи като сбор на две прости числа. Хипотезата е формулирана в писмо на Голдбах от 7 юни 1742 г. до Великия швейцарски математик Леонард Ойлер (1707–1783). Най-известната задача, която се формулира лесно, но се решава трудно, е Великата теорема на Ферма. Тя гласи, че уравнението $x^n + y^n = z^n$ не притежава цели решения x, y и z за естествени числа $n > 2$. Теоремата е формулирана през 1637 г. от френския юрист и математик Пиер дьо Ферма (1601–1665) и е доказана едва през 1994 г. от английския математик Андрю Уайлс (1953–). Първоначалният вариант на доказателството съдържа грешка, която е отстранена от автора след двегодишни усилия. Доказателството е прието от математическата общност окончателно през 1996 г. и съдържа 150 страници. То е твърде сложно и проверката му е по силите на съвсем малко математици по света.

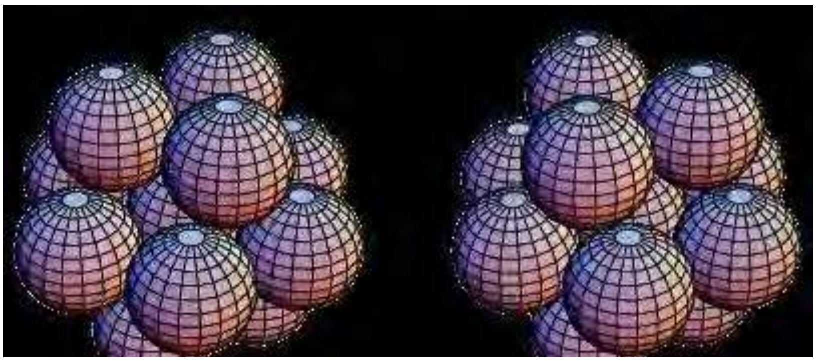
Друга трудна задача е: Да се реши в естествени числа a, b и c уравнението $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 4$. Тук трудностите са технически, а не теоретични, както е при Великата теорема на Ферма. Оказва се, че уравнението има безброй много решения, но най-малките (забележете!) са:

$$a = 154476802108746166441951315019919837485664325669565431700026634898253202035277999$$
$$b = 36875131794129999827197811565225474825492979968971970996283137471637224634055579$$
$$c = 4373612677928697257861252602371390152816537558161613618621437993378423467772036$$

Трудни задачи се срещат не само в теорията на числата, към която област от математиката принадлежат разгледаните две. Ще се спрем на още две, които този път са от геометрията. Ето първата: *Всяка проста, затворена и непрекъсната крива в равнината разделя равнината на две непресичащи се части – вътрешност и външност*. Това твърдение е известно в математиката като теорема на Жордан (Камий Жордан (1838–1922) е френски математик), появило се за първи път през 1882 г. Доказателството съдържало грешки, което самият Жордан независимо от положените усилия не успял да поправи. Пълното доказателство принадлежи на американския математик Осуалд Веблен (1880–1960) и е публикувано през 1905 г. През 1922 г. американският математик Джеймс Александър (1888–1971) доказва твърдението за пространства с произволен брой измерения. Теоремата на Жордан е с геометричен характер и се отнася към топологията. Интуитивно тя изразява следния очевиден факт: ако с помощта на молив очертаем крива върху лист хартия без да повдигаме молива и без да пресичаме вече начертани части от кривата, като се върнем в мястото, откъдето сме тръгнали, получаваме две части на листа – вътрешна и външна. Вътрешната част е ограничена, а външната е неограничена, ако си мислим, че листът е безкраен. Неповдигането на молива означава, че кривата е непрекъсната, а непресичането на вече начертани части – че кривата е проста. В началото на 20. век теоремата е била подложена на дискусия предвид появата на фракталите, дефинирани като геометрични обекти през 1904 г. от шведския математик Хелге фон Кох (1870–1924). По-долу е показан фрактал, известен като снежинката на Кох. Той се получава чрез безкрайно прибавяне на триъгълници към периметъра на даден триъгълник. След всяка итерация периметърът се увеличава и расте до безкрайност, въпреки че затворената от фрактала област остава с крайно лице, т.е. тя е крайна.



А ето и една задача, която се свързва с името на немския математик и астроном Йохан Кеплер (1571–1630). През 1611 г. Кеплер изказва хипотеза, че гъстотата d на запълването на пространството с еднакви сфери е около 74% и по-точно $d = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} \approx 0,74048 \to 74\%$. Детайлите около тази хипотеза са много интересни, но няма да се спираме на тях. Ще споменем само факта, че нейно формално математическо доказателство е публикувано едва през миналата 2017 г. През 1690 г. по повод полемика относно хипотезата на Кеплер между английския математик и физик Исак Нютон (1643–1727) и шотландския математик и астроном Джеймс Грегори (1638–1675) се ражда следната задача:



Колко най-много сфери с даден радиус могат да се поставят така, че да се допират до сфера със същия радиус? Лесна формулировка, но трудно доказателство. Възможността за поставяне на 12 сфери е била известна отдавна, но проблемът е дали може да се разположи и тринадесета сфера. Едва през 1953 г. било доказано, че това е невъзможно. Доказателството принадлежи на немския математик Курт Шут (1909–1998) и холандския алгебрист Бартел ван дер Варден (1903–1996).

Д-р М. Плюс

МЕЖДУНАРОДНИ КОНКУРСИ
ЗА РАЗРАБОТВАНЕ НА ПРОЕКТИ (РЕФЕРАТИ)

(по математика, информатика, икономика, финанси, банкиране, счетоводство, контрол, застраховане, осигуряване, предприемачество, бизнес)

В рамките на Международния проект **MITE** (**M**ethodology and **I**nformation **T**echnologies in **E**ducation – Методика и информационни технологии в образованието) през учебната 2019 г. се организират три конкурса – единият за ученици, вторият за студенти, а третият за учители. Научната част на проекта има за цел разработването на методики и съвременни информационни технологии в образованието изобщо. Партньори по проекта са:

- ВУЗФ (Висше училище по застраховане и финанси) – Университет по финанси, бизнес и предприемачество (София, България)
- Факултет по педагогическо образование при Московския държавен университет "М. Ломоносов" (Москва, Русия)
- Асоциация на педагозите, работещи с таланти (Москва, Русия)
- Сдружение „Европейско кенгуру" (България)

I. Международен конкурс за ученици
II. Международен конкурс за студенти
III. Международен конкурс за учители

Конкурсите се състоят в разработване на проекти (реферати). В първия и втория конкурс могат да участват ученици и съответно студенти (индивидуално или в екип до трима, независимо в кое училище, университет, клас или курс учат) под ръководството на преподаватели или без ръководство. Третият конкурс е предназначен за учители (индивидуално). Проектите се представят в електронен вид. Те трябва да са оформени като мултимедийни презентации с обем до 20 Mb на MS Power Point или на друг софтуер, който се разпространява свободно. Бонусни точки се присъждат на проекти, в които информатиката и информационните технологии се използват не само в презентацията, а и по същество при решаването на съответната математическа или икономическа задача.

Тематичните направления са:

1. Модели на реални процеси в икономиката, финансите, банковото дело, счетоводството, застраховането, осигуряването, предприемачеството, бизнеса, природата и обществото (за ученици и студенти);
2. Финансова математика (за ученици и студенти);
3. Използване на математически методи за решаване на практически задачи (за ученици и студенти);
4. Математиката в професионалната дейност (за студенти);
5. История на математиката (за ученици);
6. Математика и изкуство (за ученици);
7. Математиката като наука (за ученици);
8. Геометрични миниатюри (за ученици);
9. Математиката в областта на защита на информацията (за ученици);
10. Електронен журнал или уебсайт (за ученици);
11. Организация на класната работа за повишаване на успеваемостта (за учители);
12. Организация на извънкласната работа на учениците (за учители);
13. Организация на проектната и изследователската дейност на учениците (за учители).

Състезателната част е организирана в три етапа:

- **Задочен** – краен срок за изпращане на разработките е 28 януари 2019 г.
- **Очен (национален)** – на 7 и 8 февруари 2019 г. в сградата на ВУЗФ, ул. Гусла № 1, 1618 София (допуснатите до Националния кръг ще бъдат информирани до 1 февруари 2019 г.)
- **Международен** – в периода от 1 до 5 май 2019 г. в гр. Москва, Русия

Участието на студенти от ВУЗФ е безплатно. Останалите участници следва да внесат предварително такса правоучастие в размер на 25 (двадесет и пет) лева **на участник** (ако проектът е представен от повече от един участник, като научните ръководители са също участници) или 50 (петдесет) лева на проект (в случай на един участник) в срок до 21януари 2019 г. по следната банкова сметка:

ВУЗФ (за конкурса МИТЕ)
Тексим банк АД
IBAN: BG57 TEXI95451005453600
BIC: TEXIBGSF

Участващите в конкурса ученици получават правото на преференциални условия при кандидатстване във ВУЗФ с **20% отстъпка от семестриалната такса** (виж www.vuzf.bg).

Т А Л О Н

Ако желаете да ползвате правото на преференциални условия при кандидатстване и 20% отстъпка от семестриалната такса във ВУЗФ, изпратете този талон заедно с проекта.

Имена ……………………………………………………………………………

Адрес …………………………………………………………………, e-mail…………

С този талон участва и моята сестра (брат)

Имена ……………………………………………………………………………

Изпращане на проектите с краен срок на получаване 28 януари 2019 г.:

По пощата на *CD*, на адрес: ВУЗФ, За конкурса МИТЕ, ул. "Гусла" № 1, 1618 София

В придружаващото писмо напишете име на автора(ите), клас (курс), училище (университет), научен ръководител, заглавие на проекта и по кое от направленията е разработката, кратко описание на проекта и указания за работа с файловете (ако е необходимо), а също и възможни начини за връзка (за предпочитане e-mail адрес и мобилен телефон). Контакти и допълнителна информация можете да получите от г-жа Петрова на тел. 0888 438 437

По време на задочния етап ще бъдат избрани най-добрите разработки за участие в очния (национален) етап. Победителите в Националния етап ще бъдат поканени за участие в Международния етап. Националният и Международният етапи се състоят в представяне на всяка разработка в рамките на 10-15 минути (за международния етап на английски или руски език), след което в рамките на 5 минути състезателите отговарят на уточняващи въпроси (включително и по представяния материал). Критериите за оценка на ученическите и студентските проекти включват оригиналност, достоверност, атрактивност, ползваемост, оформление. Учителските проекти ще бъдат оценявани за ефективност на представяните идеи и методики, пълнота, дизайн, естетическо оформление, стил на презентирането.

Класираните на първите три места в Националния етап на всеки от трите конкурса ще получат дипломи и награди, а останалите участници в Националния етап – грамоти. За първенеците при учениците и студентите е осигурен безплатен престой и културна програма по време на Международния етап в Москва.

СЪСТЕЗАНИЯ + СЪСТЕЗАТЕЛИ

МЛАДЕЖКА БАЛКАНИАДА 2018

В миналия брой на списанието отбелязахме, че от 19 до 24 юни 2018 г. на о-в Родос, Гърция се проведе поредната 22-а младежка балканска олимпиада по математика. В олимпиадата взеха участие 18 държави, като българските ученици заеха второ място в отборното класиране след Румъния Те спечелиха 2 златни и 4 сребърни медала:

Борислав Кирилов (8 клас в ПЧМГ): 10 + 10 + 6 + 10 = 36 (златен медал)
Десислава Николова (8 клас в СМГ): 10 + 10 + 6 + 10 = 36 (златен медал)
Мартин Копчев (8 клас в МГ, Габрово): 10 + 10 + 1 + 10 = 31 (сребърен медал)
Милко Бакалов (8 клас в СМГ): 8 + 10 + 6 + 7 = 31 (сребърен медал)
Валери Ванков (9 клас в СМГ): 9 + 7 + 0 + 6 = 22 (сребърен медал)
Андон Тодоров (8 клас в СМГ): 10 + 10 + 0 + 1 = 21 (сребърен медал)

В този брой ви предлагаме задачите от олимпиадата и техни кратки решения:

Задача 1. Намерете всички двойки цели числа (*m, n*), за които

$$m^5 - n^5 = 16mn.$$

Решение: Нека (*m, n*) е решение на задачата. Ако $m = 0$, то $n = 0$. Обратно, ако $n = 0$, то $m = 0$. Заключаваме, че $(m,n) = (0,0)$ е решение на задачата и по-нататък можем да считаме, че *m* и *n* не са нули. От равенството следва, че *m* дели *n*, а така също, че *n* дели *m*. Това е възможно само ако $m = \pm n$. Възможни са няколко случая:

<u>Случай 1</u>. $m > 0$ и $n > 0$. Тогава $m = n$, откъдето $16mn = 0$, което не е възможно.

<u>Случай 2</u>. $m < 0$ и $n < 0$. Тогава отново $m = n$, което не е възможно.

<u>Случай 3</u>. $m > 0$ и $n < 0$. Тогава лявата страна на равенството е положителна, а дясната е отрицателна, което също не е възможно.

<u>Случай 4</u>. $m < 0$ и $n > 0$. Нека $m = -p$ и равенството става $p^5 + n^5 = 16pn$, като *p* и *n* са положителни. Тъй като, както и по-горе $p = n$, то $2p^5 = 16p^2$ и $p^3 = 8 = 2^3$. Заключаваме, че $p = 2$, т.е. $m = -2$ и $n = 2$. Така $(m,n) = (-2,2)$ е решение.

Окончателно задачата има две решения $(m,n) = (0,0)$ и $(m,n) = (-2,2)$.

Задача 2. Дадени са n трицифрени числа със следните свойства:

(1) Никое от числата не съдържа цифрата 0.

(2) Сборът от цифрите на всяко от числата е 9.

(3) Всеки две от числата имат различни цифри на единиците.

(4) Всеки две от числата имат различни цифри на десетиците.

(5) Всеки две от числата имат различни цифри на стотиците.

Намерете най-голямата възможна стойност на n.

Решение (на Мартин Копчев): Сборът от цифрите на всички числа е $9n$, а от друга страна е поне 3. (1+2+ … + n), защото всяка цифра се използва най-много 3 пъти. Получаваме неравенството $9n \geq \frac{3n(n+1)}{2}$, което е еквивалентно с $n \leq 5$. Пример за n = 5 са числата 144, 252, 315, 423 и 531. Следователно търсената стойност е n = 5.

Задача 3. Нека $k > 1$ и $n > 2018$ са естествени числа, като n е нечетно. Ненулеви рационални числа $x_1, x_2, ..., x_n$, не всичките равни, изпълняват условията

$$x_1 + \frac{k}{x_2} = x_2 + \frac{k}{x_3} = x_3 + \frac{k}{x_4} = ... = x_n + \frac{k}{x_1}.$$

а) Изразете произведението $x_1 x_2 ... x_n$ чрез k и n.

б) Намерете най-малкото k, за което съществуват n и $x_1, x_2, ..., x_n$, за които са изпълнени условията на задачата.

Решение (По идея на Борислав Кирилов): Нека n и $x_1, x_2, ..., x_n$ са с исканите свойства. Тъй като не всички $x_1, x_2, ..., x_n$ са равни, съществуват две с индекси с разлика 1, които не са равни. Без ограничение можем да смятаме, че това са x_1 и x_2. Равенството $x_1 + \frac{k}{x_2} = x_2 + \frac{k}{x_3}$ е еквивалентно с $x_1 - x_2 = \frac{k(x_2 - x_3)}{x_2 x_3}$.

Аналогично $x_2 - x_3 = \frac{k(x_3 - x_4)}{x_3 x_4}, \ldots, \quad x_{n-1} - x_n = \frac{k(x_n - x_1)}{x_n x_1}, \quad x_n - x_1 = \frac{k(x_1 - x_2)}{x_1 x_2}$ След последователно заместване получаваме:

$$x_1 - x_2 = \frac{k(x_2 - x_3)}{x_2 x_3} = \frac{k^2 (x_3 - x_4)}{x_2 x_3^2 x_4} = ... = \frac{k^n (x_1 - x_2)}{x_1^2 x_2^2 ... x_n^2}.$$

Заключаваме, че $x_1 - x_2 = \frac{k^n (x_1 - x_2)}{x_1^2 x_2^2 ... x_n^2}$. Използваме, че $x_1 \neq x_2$ и съкращаваме на $x_1 - x_2$. Тогава $x_1^2 x_2^2 ... x_n^2 = k^n$, откъдето $x_1 x_2 ... x_n = \pm\sqrt{k^n}$. По условие числата $x_1, x_2, ..., x_n$ са рационални и n е нечетно. Следователно k трябва да е точен квадрат. Най-малкото k е 4. Тази стойност се реализира при $n = 2019$,

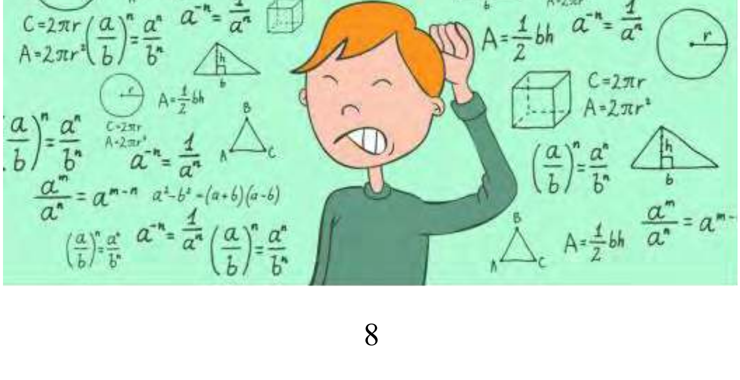
$x_1 = x_4 = ... = x_{3k+1} = x_{2017} = 4$; $x_2 = x_5 = ... = x_{3k+2} = x_{2018} = -2$ и $x_3 = x_6 = ... = x_{3k+3} = x_{2019} = 1$ за $k = 0, 1, 2, ..., 672$.

Задача 4. Триъгълникът ABC е остроъгълен, а A', B' и C' са симетричните точки на A, B и C съответно при отражение относно BC, CA и AB. Описаните окръжности на триъгълниците ABB' и ACC' се пресичат за втори път в точка A_1. Аналогично се дефинират точките B_1 и C_1. Да се докаже, че правите AA_1, BB_1 и CC_1 се пресичат в една точка.

Решение (По идея на Борислав Кирилов): Разглеждаме триъгълниците ABB' и ACC'. От симетрията следва, че $AB = AB'$, $AC = AC'$ и $\angle B'AB = \angle C'AC = 2\alpha (\angle BAC = \alpha)$, а от описаните окръжности около четириъгълниците ABA_1B' и ACA_1C' получаваме $\angle AA_1B = \angle BA_1B' = \frac{180^0 - 2\alpha}{2} = 90^0 - \alpha$, както и $\angle AA_1C = \angle CA_1C' = \frac{180^0 - 2\alpha}{2} = 90^0 - \alpha$. Следователно точките A_1, B и C', както и точките A_1, C и B' са колинеарни. Получаваме още, че AA_1 е ъглополовяща в ΔA_1BC. Аналогично точките C_1, B и A', както и точките C_1, A и B' са колинеарни, а CC_1 е ъглополовяща в ΔABC_1; точките B_1, A и C', както и точките B_1, C и A' са колинеарни, а BB_1 е ъглополовяща в ΔAB_1C. Изразявайки ъглите на триъгълниците ΔABC_1, ΔA_1BC и ΔAB_1C чрез ъглите на дадения триъгълник, получаваме, че $ABC_1 \sim A_1BC \sim AB_1C$ по първи признак.

Нека $AA_1 \cap BC = X$, $B_1B \cap AC = Y$, $AB \cap C_1C = Z$. От свойство на ъглополовящите имаме отношенията $\frac{BC_1}{AC_1} = \frac{BZ}{AZ}, \frac{A_1B}{A_1C} = \frac{BX}{CX}, \frac{AB_1}{CB_1} = \frac{AY}{CY}$. Прилагаме обратната теорема на Чева за ΔABC и получаваме $\frac{AY}{CY} \cdot \frac{CX}{BX} \cdot \frac{BZ}{AZ} = \frac{AB_1}{CB_1} \cdot \frac{A_1C}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{AC_1} = 1$ от подобието на триъгълниците.

Окончателно $\frac{AB_1}{CB_1} . \frac{A_1C}{A_1B} . \frac{BC_1}{AC_1} = \frac{AB}{BC_1} . \frac{AC}{AB_1} . \frac{BC_1}{AC_1} = \frac{AB}{AB_1} . \frac{AC}{AC_1} = 1.$



M+ ПОДГОТОВКА

АЛГЕБРИЧЕН ПОДХОД КЪМ ДИОФАНТОВИ УРАВНЕНИЯ
Част II
(подготовка за младежката балканиада)

Навид Сафаеи, изследовател
Шарифски Технологичен Университет – Техеран, Иран

Тази статия е продължение на статията със същото заглавие в бр. 2/2018 г. на Математика плюс. Изследват се диофантови уравнения с две или повече неизвестни, в които се търсят прости числа или комбинации от прости и естествени числа. Примерите са от известни математически състезания и олимпиади, проведени в държави с традиции в ученическата олимпиадна математика. Задачите от първата част по темата се основават на алгебрични оценки, които включват елементарни неравенства и/или дискриминанти на квадратни тричлени. В тази част се използват оценки с помощта на последователни точни квадрати. Запазена е номерацията на задачите от първата част, като тук е продължена.

Използване на последователни точни квадрати

Задача 12. (Украинска олимпиада, 2013 г.) Да се намерят всички двойки естествени числа x и y, за които числата x^2+8y и y^2+8x са точни квадрати

Решение: Без ограничение можем да считаме, че $x \geq y$. Тогава
$$x^2 < x^2+8y \leq x^2+8x < (x+4)^2.$$
Възможни са следните 3 случая:
$$x^2+8y=(x+1)^2$$
$$x^2+8y=(x+2)^2$$
$$x^2+8y=(x+3)^2$$
Първият и третият случай се отхвърлят, защото след премахване на x^2 от двете страни стигаме до равенство на четно и нечетно число, което не е възможно. Заключаваме, че
$$x^2+8y=(x+2)^2,$$
откъдето $x=2y-1$. Тогава числото $y^2+8x=y^2+8(2y-1)=(y+8)^2-72$ трябва да е точен квадрат, който означаваме с n^2. Получаваме, че
$$(y+8)^2-n^2=(y+8-n)(y+8+n)=72.$$
Двата множителя от лявата страна на второто равенство са с една и съща четност и тъй като 72 е четно число, заключаваме, че двата множителя са четни. Освен това
$$y+8+n > y+8-n$$

и задачата се редуцира до два случая:

$$y+8+n=36, y+8-n=2$$
$$y+8+n=18, y+8-n=4$$

В първия случай получаваме $y=11$ и $x=21$, а във втория $y=3$ и $x=5$.

Задача 13. Намерете всички прости числа p, q и r, за които

$$p^4+2p+q^4+q^2=r^2+4q^3+1$$

Решение: Нека p, q и r са решения на задачата. Ще разгледаме няколко случая:

1. $r=2$.

1.1. $q=2$.

Равенството става: $p^4+2p=17$, т.е. $p(p^3+2)=17$ и тъй като числото 17 е просто, единствената възможност е $p=1$, което не е решение.

1.2. $q=3$.

Равенството става: $p^4+2p=23$, което не води до решение, защото, както и по-горе, числото 23 е просто.

1.3. $q>3$, т.е. $q\geq 5$.

Имаме: $p^4+2p+q^4+q^2=p^4+2p+q.q^3+q^2>p^4+2p+5q^3+q^2>4q^3+5=r^2+4q^3+1$, т.е. $p^4+2p+q^4+q^2>r^2+4q^3+1$ и отново получаваме, че равенството от условието на задачата не е възможно.

2. r е нечетно.

Сега $p^4=r^2+4q^3+1-2p-q^4-q^2$ и тъй като дясната страна е четно число, следва, че $p=2$. Тогава $r^2=q^4-4q^3+q^2+19$.

2.1. q е нечетно и $q>5$.

Лесно се проверява, че е изпълнено

$$(q^2-2q-2)^2<q^4-4q^3+q^2+19<(q^2-2q-1)^2.$$

Наистина, първото неравенство е еквивалентно с $q^2-8q+15=(q-3)(q-5)>0$, а второто с $q^2+4q-18=\left(q+2+\sqrt{22}\right)\left(q+2-\sqrt{22}\right)>0$ и е достатъчно да вземем предвид, че $2<-2+\sqrt{22}<3<5$. Заключаваме, че r^2 е заключено между два последователни точни квадрата и следователно не е точен квадрат. Следователно този случай не води до решение.

2.2. $q=3$.

Сега $r^2=q^4-4q^3+q^2+19=1$, което не е решение (r по условие трябва да е просто число).

2.3. $q=5$.

Получаваме $r^2=q^4-4q^3+q^2+19=169$ и следователно $r=13$.

Единственото решение на задачата е $p=2$, $q=5$, $r=13$.

Задача 14. (Туймаада, 2013 г.) Намерете всички прости числа p и q, за които $p^2 - pq - q^3 = 1$.

Това е задача 7 от първата част на тази статия, публикувана в бр. 2, 2018 г. на Математика плюс, където е решена с помощта на елементарни неравенства. Тук ще предложим решение с използване на последователни точни квадрати.

Решение 2: Уравнението $p^2 - pq - q^3 = 1$ е еквивалентно с $p^2 = pq + q^3 + 1$ и следователно $p^2 > q^3 > q^2$, откъдето $p > q$ и следователно $p \geq 2 + q$. Да запишем уравнението във вида $p(p-q) = (1+q)(q^2 - q + 1)$. От направеното наблюдение следва, че $p|q^2 - q + 1$ и значи $q^2 - q + 1 = mp$ за някое естествено число m. Тогава

$$p(p-q) = (1+q)(q^2-q+1) = (1+q)mp,$$

откъдето $p - q = (1+q)m$ и $p = (m+1)q + m$. Оттук

$$m(1+m)q + m^2 = mp = q^2 - q + 1, \text{т.е. } q^2 - (m^2+m+1)q + 1 - m^2 = 0.$$

Разглеждаме последното равенство като квадратно уравнение относно q. Дискриминантата му е $D = (m^2+m+1)^2 + 4(m^2-1)$, която трябва да е точен квадрат.

Неравенството $(m^2+m-1)^2 \leq D$ е еквивалентно с $2m^2 + m - 1 \geq 0$, което е изпълнено за всяко естествено число m. Неравенството $D < (m^2+m+3)^2$ е еквивалентно с $m + 3 > 0$, което също е изпълнено за всяко естествено число m. Имаме:

$$(m^2+m-1)^2 \leq D < (m^2+m+3)^2.$$

Точните квадрати в намерения интервал са $(m^2+m-1)^2, (m^2+m)^2$, $(m^2+m+1)^2$ и $(m^2+m+2)^2$. Тъй като $D = (m^2+m+1)^2 + 4(m^2-1)$ е не по-малко от $(m^2+m+1)^2$, то случаите $D = (m^2+m-1)^2$ и $D = (m^2+m)^2$ са невъзможни. Случаят

$D = (m^2+m+2)^2$ е еквивалентен с $2m^2 - 2m - 7 = 0$, което не е изпълнено за естествени стойности на m. Единствената възможност е $D = (m^2+m+1)^2$, откъдето $m = 1$. В този случай $p = q^2 - q + 1 = 2q + 1$ и отново получаваме единственото решение на задачата $(p,q) = (7,3)$.

Решение 3: За пълнота на разглежданата задача ще посочим още едно нейно решение. Да представим равенството от условието на задачата във вида $p^2 - qp - (1+q^3) = 0$, който представлява квадратно уравнение относно p. Използвайки техниката на дискриминантите, можем да твърдим, че изразът $D = q^2 + 4(1+q^3)$ е точен квадрат. Ако $q = 2$, то

$$D = q^2 + 4(1+q^3) = 4 + 4(1+8) = 40$$

не е точен квадрат и следователно $q = 2$ не е решение. Ако $q = 3$, то

$$D = q^2 + 4(1+q^3) = 9 + 4(1+27) = 121 = 11^2.$$

Сега получаваме, че $p = 7$ и намираме известното от задача 7 решение $(p,q) = (7,3)$.

Ако $q = 5$, то $D = q^2 + 4(1+q^3) = 25 + 4(1+125) = 529$ не е точен квадрат и следователно $q = 5$ не е решение.

Нека по-нататък $q \geq 7$ и нека $4q^3 + q^2 + 4 = n^2$ за някое естествено число n. Представяме последния израз във вида $(n-2)(n+2) = q^2(4q+1)$. Оттук следва, че q дели

$(n-2)(n+2)$. Ако m дели едновременно числата $n+2$ и $n-2$, то m дели и тяхната разлика, т.е. m дели 4. Следователно $m=1, 2$ или 4. Тъй като $q \geq 7$, то q не дели едновременно числата $n+2$ и $n-2$. Заключаваме, че q^2 дели $n-2$ или $n+2$. И в двата случая е изпълнено $q^2 \leq n+2$ и следователно $4q+1 \geq n-2$. Тогава

$q^2 \leq n+2 = n-2+4 \leq 4q+5$, т.е. $q^2 \leq 4q+5 \Leftrightarrow q^2-4q-5 \leq 0 \Leftrightarrow (q+1)(q-5) \leq 0$,

което е нарушено при $q \geq 7$.

Следователно задачата има единствено решение $(p,q)=(7,3)$.

Задача 15. (Беларуска олимпиада 2008 г.) Да се намерят всички прости числа p, за които числото p^2-p-1 е точен куб.

Решение: Нека $p^2-p-1=n^3$ за някое естествено число n. Тогава

$$p(p-1)=n^3+1=(n+1)(n^2-n+1).$$

Заключаваме, че p дели $n+1$ или n^2-n+1. В първия случай е изпълнено $p \leq n+1$, откъдето $n \geq p-1 \geq n^2-n+1$, т.е. $n^2-n+1 \leq n \Leftrightarrow n^2-2n+1 \leq 0 \Leftrightarrow (n-1)^2 \leq 0$. Оттук следва, че $n=1$ и $p=2$, т.е. $p=2$ е решение на задачата. Във втория случай е изпълнено $n^2-n+1=mp$ за някое естествено число m. Тогава $p-1=m(n+1)$ и

$(n+1)(n^2-n+1)=p(p-1)=pm(n+1)$. Съкращаваме на $n+1$ и получаваме

$n^2-n+1=pm=(m(n+1)+1)m$, т.е. $n^2-n+1=m^2n+m^2+m$ и оттук

$$n^2-(1+m^2)n-(m^2+m-1)=0.$$

Последното може да се разглежда като квадратно уравнение относно n, чиято дискриминанта $D=m^4+6m^2+4m-3=(m^2+3)^2+4m-12$ трябва да е точен квадрат. Неравенството $(m^2+3)^2<D$ е еквивалентно на $m-3>0$ и е изпълнено при $m>3$. Неравенството $D<(m^2+4)^2$ е еквивалентно с $2m^2-4m+19>0$ и е изпълнено за всяко m. Заключаваме, че за $m>3$ е изпълнено $(m^2+3)^2<D<(m^2+4)^2$, т.е. D не е точен квадрат, защото се намира между два последователни точни квадрати. Получаваме, че този случай не води до решение. Остава да разгледаме случаите $m=1,\ 2$ или 3.

При $m=1$ квадратното уравнение относно n не води до цели решения, а следователно не съществуват и решения на задачата за p.

При $m=2$ квадратното уравнение относно n също не води до цели решения.

При $m=3$ квадратното уравнение относно n става $n^2-10n-11=0$ с решения $n=-1$ и $n=11$, от които само второто е естествено число. При $n=11$ от

$$p^2-p-1=n^3=11^3=1331$$

намираме $p(p-1)=1332=37.36$, т.е. $p=37$, което е просто число.

Окончателно задачата има две решения $(p,n)=(2,1)$ и $(37,11)$.

Задача 16. (Беларуска олимпиада 2016 г.) Ако q и r са прости числа, да се намерят всички естествени числа n, за които

$$n=q(q^2-q-1)=r(2r+3)$$

Решение: Нека $q=r$. Като съкратим, получаваме уравнението $q^2-q-1=2q+3$, т.е. $q^2-3q—4=0$, чиито корени са -1 и 4, неводещи до решение. По-нататък ще считаме, че $q \neq r$. Ако q и r са решения, то r дели $q^2 - q - 1$ и следователно съществува естествено число m така, че $q^2 - q - 1 = mr$. Заместваме в уравнението и получаваме $2r + 3 = mq$, като оттук $r = \frac{mq-3}{2}$. Тогава $q^2 - q - 1 = m.\frac{mq-3}{2}$ и следователно

$$2q^2 - (2 + m^2)q + 3m - 2 = 0.$$

Последното е квадратно уравнение относно q с дискриминанта

$$D = m^4 + 4m^2 - 24m + 20,$$

която трябва да е точен квадрат. Неравенството $(m^2)^2 < D$ е еквивалентно на $4m^2 - 24m + 20 > 0$, т.е. на $m^2 - 6m + 5 = (m-1)(m-5) > 0$, което е изпълнено при $m > 5$. Неравенството $D < (m^2+2)^2$ е еквивалентно на $3m - 2 > 0$, което е изпълнено за всяко естествено число m. Заключаваме, че $(m^2)^2 < D < (m^2+2)^2$ за всяко $m > 5$. Единствената възможност е $D = (m^2+1)^2$, откъдето $2m^2 - 24m + 19 = 0$. Полученото квадратно уравнение няма цели корени и не получаваме решения. Остава да се проверят случаите $m = 1, 2, 3, 4$ и 5.

При $m = 1$ имаме $2q^2 - (2 + m^2)q + 3m - 2 = 2q^2 - 3q + 1 = 0$, чиито корени са 1 и $\frac{1}{2}$, неводещи до решение.

При $m = 2$ имаме $2q^2 - (2 + m^2)q + 3m - 2 = 2q^2 - 6q + 4 = 0$, т.е. $q^2 - 3q + 2 = 0$, чиито корени са 1 и 2, също неводещи до решение.

При $m = 3$ имаме $2q^2 - (2 + m^2)q + 3m - 2 = 2q^2 - 11q + 7 = 0$, чиито корени не са цели числа и не получаваме решение.

При $m = 4$ имаме $2q^2 - (2 + m^2)q + 3m - 2 = 2q^2 - 18q + 10 = 0$, т.е. $q^2 - 9q + 5 = 0$, чиито корени отново не са цели числа и не получаваме решение.

Накрая, при $m = 5$ имаме $2q^2 - (2 + m^2)q + 3m - 2 = 2q^2 - 27q + 13 = 0$, чиито корени са 13 и $-\frac{1}{2}$. При $q = 13$, което е просто число, намираме $r = \frac{5.13-3}{2} = 31$, което също е просто число. Сега $n = r(2r + 3) = 31.65 = 2015$ и това е единственото решение на задачата.

Задача 17. (Гръцка олимпиада 2017 г.) да се намерят всички цели числа a, b и c, за които $a > 0$, $a + b + c = 0$ и числото $2017 - a^3b - b^3c - c^3a$ е точен квадрат.

Решение: Нека a, b и c са решения на задачата. От условието следва, че $c = -a - b$. Непосредствено се проверява, че

$$a^3b + b^3c + c^3a = -(a^2 + ab + b^2)^2.$$

Тогава $2017 - a^3b - b^3c - c^3a = 2017 + (a^2 + ab + b^2)^2 = d^2$ за естествено число d. Имаме $(d - a^2 - ab - b^2)(d + a^2 + ab + b^2) = 2017$. Тъй като

$$a^2 + ab + b^2 = a^2\left(1 + \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2}\right) = a^2(m^2 + m + 1),$$

където $m = \frac{b}{a}$, и дискриминантата на квадратния тричлен $m^2 + m + 1$ е отрицателна, то $m^2 + m + 1 > 0$ за всяко m и следователно $a^2 + ab + b^2 > 0$. Тогава $d + a^2 + ab + b^2 > d - a^2 - ab - b^2$. От друга страна числото 2017 е просто и заключаваме, че

$$d + a^2 + ab + b^2 = 2017 \text{ и } d - a^2 - ab - b^2 = 1.$$

Като съберем тези две равенства, намираме $2d = 2018$, т.е. $d = 1009$. Освен това

$$a^2 + ab + b^2 = 1008.$$

Ще изследваме полученото равенство. Ако a и b са нечетни, лявата страна на равенството е нечетна, а дясната е четна и това е невъзможно. Случаят, когато a и b са с различна четност също е невъзможен. Остава двете числа да са четни. Нека $a = 2x$ и $b = 2y$ за подходящи цели числа $x > 0$ и y. Тогава $x^2 + xy + y^2 = 252 = 9.4.7$. Както и по-горе заключаваме, че x и y са четни. Можем да твърдим, че съществуват цели числа $x_1 > 0$ и y_1 така, че $x = 2x_1$ и $y = 2y_1$. Тогава $x_1^2 + x_1y_1 + y_1^2 = 9.7$ и 9 дели $x_1^2 + x_1y_1 + y_1^2$, т.е. 9 дели $(x_1 - y_1)(x_1^2 + x_1y_1 + y_1^2) = x_1^3 - y_1^3$. В частност $x_1^3 - y_1^3 \equiv 0 \pmod 3$, т.е. $x_1^3 \equiv y_1^3 \pmod 3$. От малката теорема на Ферма следва, че $x_1^3 \equiv x_1 \pmod 3$ и $y_1^3 \equiv y_1 \pmod 3$. Следователно $x_1 \equiv y_1 \pmod 3$ и $x_1 - y_1 \equiv 0 \pmod 3$. Заключаваме, че

$$(x_1 - y_1)^2 + 3x_1y_1 = x_1^2 + x_1y_1 + y_1^2 \equiv 0 \pmod 9$$

и оттук $3x_1y_1 \equiv 0 \pmod 9$, което дава, че $x_1y_1 \equiv 0 \pmod 3$. Тъй като x_1 и y_1 дават един и същ остатък по модул 3, последното е възможно само ако x_1 и y_1 се делят едновременно на 3. Съществуват цели числа $x_2 > 0$ и y_2 така, че $x_1 = 3x_2$ и $y_1 = 3y_2$. Тогава $x_2^2 + x_2y_2 + y_2^2 = 7$, т.е. $x_2^2 + x_2y_2 + y_2^2 - 7 = 0$. Разглеждаме последното равенство като квадратно уравнение относно x_2. Дискриминантата му $D = y_2^2 - 4(y_2^2 - 7) = 28 - 3y_2^2$ трябва да е точен квадрат. Ако $28 - 3y_2^2 = z^2$, където z е цяло число, то $3y_2^2 + z^2 = 28$. Оттук следва, че $3y_2^2 \le 27$, т.е. $y_2^2 \le 9$ и следователно y_2 е цяло число в интервала $[-3; 3]$.

<u>*Случай*</u> 1. $y_2 = -3$

От $x_2^2 + x_2y_2 + y_2^2 - 7 = 0$ намираме $x_2^2 - 3x_2 + 2 = 0$, чиито корени 1 и 2 са цели и положителни. Следователно те са решения. Като се върнем обратно към a и b, получаваме последователно: $x_1 = 3$ и $x_1 = 6$, $x = 6$ и $x = 12$, $a = 12$ и $a = 24$, $y_1 = -9$, $y = -18$, $b = -36$, $c = -a - b = 24$ и $c = 12$. Следователно в този случай решенията са:

$$(a,b,c) = (12,-36,24) \text{ и } (a,b,c) = (24,-36,12).$$

<u>*Случай*</u> 2. $y_2 = -2$

От $x_2^2 + x_2y_2 + y_2^2 - 7 = 0$ намираме $x_2^2 - 2x_2 - 3 = 0$, което има само един цял положителен корен 3. Като се върнем обратно към a и b, получаваме последователно: $x_1 = 9$, $x = 18$, $a = 36$, $y_1 = -6$, $y = -12$, $b = -24$ и $c = -a - b = -12$. Следователно в този случай задачата има едно решение:

$$(a,b,c) = (36,-24,-12).$$

Случай 3. $y_2 = -1$

От $x_2^2 + x_2y_2 + y_2^2 - 7 = 0$ намираме $x_2^2 - x_2 - 6 = 0$, което има само един цял положителен корен 3. Като се върнем обратно към *a* и *b*, получаваме последователно: $x_1 = 9$, $x = 18$, $a = 36$, $y_1 = -3$, $y = -6$, $b = -12$ и $c = -a - b = -24$. Следователно в този случай задачата има едно решение:

$$(a,b,c) = (36,-12,-24).$$

Случай 4. $y_2 = 0$

От $x_2^2 + x_2y_2 + y_2^2 - 7 = 0$ намираме $x_2^2 - 7 = 0$, което няма цели решения. Следователно в този случай задачата няма решение.

Случай 5. $y_2 = 1$

От $x_2^2 + x_2y_2 + y_2^2 - 7 = 0$ намираме $x_2^2 + x_2 - 6 = 0$, което има само един цял положителен корен 2. Като се върнем обратно към *a* и *b*, получаваме последователно: $x_1 = 6$, $x = 12$, $a = 24$, $y_1 = 3$, $y = 6$, $b = 12$ и $c = -a - b = -36$. Следователно в този случай задачата има едно решение:

$$(a,b,c) = (24,12,-36).$$

Случай 6. $y_2 = 2$

От $x_2^2 + x_2y_2 + y_2^2 - 7 = 0$ намираме $x_2^2 + 2x_2 - 3 = 0$, което има само един цял положителен корен 1. Като се върнем обратно към *a* и *b*, получаваме последователно: $x_1 = 3$, $x = 6$, $a = 12$, $y_1 = 6$, $y = 12$, $b = 24$ и $c = -a - b = -36$. Следователно в този случай задачата има едно решение:

$$(a,b,c) = (12,24,-36).$$

Случай 7. $y_2 = 3$

От $x_2^2 + x_2y_2 + y_2^2 - 7 = 0$ намираме $x_2^2 + 3x_2 + 2 = 0$, чиито корени са цели, но са отрицателни. Следователно в този случай задачата няма решение.

Окончателно задачата има общо шест решения: $(a,b,c) = (12,24,-36)$, $(a,b,c) = (12,-36,24)$, $(a,b,c) = (24,12,-36)$, $(a,b,c) = (24,-36,12)$, $(a,b,c) = (36,-12,-24)$ и $(a,b,c) = (36,-24,-12)$.

ЛИТЕРАТУРА

Сафаеи, Н. (2018). Алгебричен подход към диофантови уравнения, *Математика плюс*, 2, 18 – 23. ISSN 0861-8321 (print), 2603-4964 (on line).

Grozdev, S. (2007). *For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice)*. Sofia: ADE. ISBN 978-954-92139-1-1, 295 pages.

$\overset{?}{1 = 4}$ **M+** **ЕДНА ЗАДАЧА +**
МНОГО РЕШЕНИЯ

ЗАДАЧА НА ОЙЛЕР

ОТНОВО ЗАДАЧА ОТ „ЕВРОПЕЙСКО КЕНГУРУ”

д-р Хари Алексиев

Водено от желанието да бъде полезно на ученици, учители и студенти, списанието предлага на своите читатели рубриката “Една задача + много решения”, която включва най-разнообразни задачи: урочни, олимпиадни, конкурсни. Целта е да бъде разкрита историята на съответната задача, да се разбере как тя е била замислена, да се осъзнае идеята за нейното съставяне и да се осъществи докосване до потенциала на възможните ѝ приложения. Един от начините за това е чрез намиране на различни решения. Търсенето на поне едно решение се превръща в “мисловен алпинизъм”, заради неусетната поява на желание за откриване на повече решения.

Искрено се надяваме, че подобно предизвикателство ще мотивира читателя за активна самостоятелна работа и той ще се включи в рубриката със свои предложения.

Очакваме писмата Ви на адреса на редакцията до д-р Хари Алексиев, който води рубриката.

Пожелаваме Ви приятни занимания!

Поводът да се спрем отново на Международното състезание „Европейско кенгуру” е наблюдението, че в темите често попадат задачи с много решения. При условията на състезанието в рамките на регламентираните 75 минути е трудно да се открият многото решения, а и това не е необходимо. Но след състезанието или при подготовката за следващото е полезно да се изследва възможността за намиране на повече решения на част от задачите. Тази дейност е подходяща като етап от подготовката за следващите олимпиадни предизвикателства.

Ще се спрем на задача 2 от темата за 11-12 клас, предложена на Националния кръг на Международното състезание „Европейско Кенгуру“, проведен на 2 юни 2018 г.

Задача. Ако реалните числа x, y и z са решения на системата

$$\left| \begin{aligned} x+y+2z &= \frac{3}{2} \\ \frac{4}{5}xy - z^2 + 2z &= \frac{5}{4} \end{aligned} \right. ,$$

да се намери стойността на израза $x-y+z$.

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

Решение 1. („Налучкване“). Основание за търсене на верния отговор чрез налучкване е желанието да се реши задачата с по-малко и по-лесни пресмятания. Макар, че този метод не е за препоръчване, той се използва често от участниците в тестови състезания. В случая избираме отговор **A),** т.е. нека $x-y+z=2$. Разглеждаме това равенство заедно с първото уравнение от дадената система и получаваме следната нова система:

$$\left| \begin{array}{l} x+y+2z=\dfrac{3}{2} \\ x-y+z=2 \end{array} \right. .$$

Като съберем двете уравнения от новата система, получаваме $2x+3z=\dfrac{7}{2}$, откъдето $2x=\dfrac{7}{2}-3z$. А сега, като извадим второто уравнение от първото, стигаме до $2y+z=-\dfrac{1}{2}$, откъдето $2y=-\dfrac{1}{2}-z$. Тогава $2x.2y=\left(\dfrac{7}{2}-3z\right).\left(-\dfrac{1}{2}-z\right)$, т.е. $4xy=\left(3z-\dfrac{7}{2}\right)\left(z+\dfrac{1}{2}\right)$. Заместваме получения израз във второто уравнение на дадената система и получаваме

$$\frac{\left(3z-\dfrac{7}{2}\right)\left(z+\dfrac{1}{2}\right)}{5}-z^2+2z=\frac{5}{4} .$$

Последното е квадратно уравнение относно z, което след преобразуване става $z^2-4z+4=0$, т.е. $(z-2)^2=0$ и оттук $z=2$. Тогава $2x=\dfrac{7}{2}-3z=\dfrac{7}{2}-6=-\dfrac{5}{2}$ и следователно $x=-\dfrac{5}{4}$. Аналогично $2y=-\dfrac{1}{2}-z=-\dfrac{1}{2}-2=-\dfrac{5}{2}$ и следователно $y=-\dfrac{5}{4}$. Получихме, че $x=y$ и заключаваме, че наистина стойността на $x-y+z$ е 2.

Решение 2. („Оценяване“). Ще използваме неравенството между средното аритметично и средното геометрично $4xy\le(x+y)^2$. Ако x и y са решения на системата от условието на задачата, то от първото уравнение имаме $x+y+2z=\dfrac{3}{2}$, а от второто уравнение – съответно $4xy=5\left(z^2-2z+\dfrac{5}{4}\right)$. Тогава неравенството между средното аритметично и средното геометрично се записва във вида: $5\left(z^2-2z+\dfrac{5}{4}\right)\le\left(\dfrac{3}{2}-2z\right)^2$. Оттук $5z^2-10z+\dfrac{25}{4}\le\dfrac{9}{4}-6z+4z^2$, което е еквивалентно с $z^2-4z+4\le 0$, т.е. с $(z-2)^2\le 0$. Заключаваме, че $z=2$. Освен това в неравенството между средното аритметично и средното геометрично се получава равенство при $x=y$. В разглеждания случай имаме равенство и следователно $x=y$. В резултат на това получаваме, че $x-y+z=2$.

Решение 3. („Алгебричен подход”). Нека x, y и z са решения на системата. От второто уравнение имаме $\dfrac{4}{5}xy=z^2-2z+\dfrac{5}{4}$, т.е. $\dfrac{4}{5}xy=(z-1)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$ и

$$4xy=5\left\{(z-1)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}=\left(2^2+1^2\right).\left\{(z-1)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}.$$

Ще използваме тъждеството $\left(a^2+b^2\right)\left(p^2+q^2\right)=\left(ap\pm bq\right)^2+\left(qa\mp pb\right)^2$. Тогава

$$4xy=\left\{2(z-1)+1.\frac{1}{2}\right\}^2+\left\{1.(z-1)-2.\frac{1}{2}\right\}^2=\left(2z-\frac{3}{2}\right)^2+\left(z-2\right)^2.$$

От друга страна $4xy=\left(x+y\right)^2-\left(x-y\right)^2$ и тъй като от първото уравнение на системата $x+y=\frac{3}{2}-z$, то $4xy=\left(\frac{3}{2}-2z\right)^2-\left(x-y\right)^2$. Обединявайки двата израза за $4xy$, стигаме до

$$\left(\frac{3}{2}-2z\right)^2-\left(x-y\right)^2=\left(2z-\frac{3}{2}\right)^2+\left(z-2\right)^2.$$

Оттук $\left(x-y\right)^2+\left(z-2\right)^2=0$, което е възможно само ако $x=y$ и $z=2$. Окончателно намираме, че $x-y+z=2$.

Решение 4. („Алгебричен подход”). От първото уравнение на системата изразяваме $x+y=\frac{3}{2}-2z$, т.е. $(x+y)^2=\left(\frac{3}{2}-2z\right)^2$, а от второто – съответно $4xy=5z^2-10z+\frac{25}{4}$. В Решение 3 използвахме тъждеството $\left(x+y\right)^2-\left(x-y\right)^2=4xy$, в което заместваме получените изрази. Получаваме:

$$\left(\frac{3}{2}-2z\right)^2-\left(x-y\right)^2=5z^2-10z+\frac{25}{4}$$

$$-\left(x-y\right)^2=5z^2-10z+\frac{25}{4}-\left(\frac{3}{2}-2z\right)^2=z^2-4z+4=\left(z-2\right)^2$$

$$-\left(x-y\right)^2=\left(z-2\right)^2.$$

Тъй като $\left(z-2\right)^2\geq 0$, заключаваме, че $x=y$ и $z=2$. Ето защо $x-y+z=2$.

Решение 5. („Формули на Виет)”. Ако x, y и z са решения на системата, то от първото и второто уравнение на системата изразяваме съответно:

$$\begin{cases} x+y=\dfrac{3}{2}-2z \\ xy=\dfrac{5}{4}\left(z^2-2z+\dfrac{5}{4}\right) \end{cases}.$$

Съгласно формулите на Виет x и y са корени на уравнението

$$t^2-\left(\frac{3}{2}-2z\right)t+\frac{5}{4}\left(z^2-2z+\frac{5}{4}\right)=0$$

Тъй като x и y са реални корени, то за дискриминантата на квадратното уравнение имаме

$$\left(\frac{3}{2}-2z\right)^2-5\left(z^2-2z+\frac{5}{4}\right)\geq 0$$

$$\frac{9}{4}-6z+4z^2-5z^2+10z-\frac{25}{4}\geq 0$$

$$-(z-2)^2\geq 0$$

Последното е възможно само при $z=2$ и тъй като в този случай дискриминантата равна на нула, то квадратното уравнение има двукратен корен, т.е. $x=y$. Окончателно пресмятаме, че $x-y+z=2$.

Решение 6. („Конструктивен подход"). Нека $x=a+b$ и $y=a-b$. Тогава от първото уравнение на системата намираме $a=\frac{3}{4}-z$. От друга страна от второто уравнение на системата следва, че $xy=\frac{5}{4}z^2-\frac{5}{2}z+\frac{25}{16}$ и като вземем предвид, че $xy=(a+b)(a-b)=a^2-b^2$, получаваме $a^2-b^2=\frac{5}{4}z^2-\frac{5}{2}z+\frac{25}{16}$. Ако в последното заместим $a=\frac{3}{4}-z$, стигаме до $\left(\frac{3}{4}-z\right)^2-b^2=\frac{5}{4}z^2-\frac{5}{2}z+\frac{25}{16}$. Оттук $-b^2=\frac{z^2}{4}-z+1=\left(\frac{z}{2}-1\right)^2$ и тъй като $\left(\frac{z}{2}-1\right)^2\geq 0$, заключаваме, че $b=0$. Тогава $x=y=a$, $z=2$ и отново намираме, че $x-y+z=2$.

Коментар: Възможно е да съществуват и други решения. Вие сте на ход!

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Гроздев, С. и колектив (2018). *Европейско кенгуру 2018. Задачи и методически решения*. София: Сдружение „Европейско кенгуру", 127 стр., ISBN: 978-6197020-25-0.

2. Grozdev, S. (2007). *For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience* (*Theory and Practice*). Sofia: ADE, ISBN: 978-954-92139-1-1.

M+ДЕСЕТ ЗАДАЧИ ЗА...

ЕКСТРЕМАЛНИ ЗАДАЧИ ЗА ТЕТРАЕДЪР

Христо Лесов, гр. Казанлък

Разглеждаме тетраедър $ABCD$ с дължини a, b, c, d, e и f съответно на ръбовете му BC, CA, AB, AD, BD и CD. Означаваме с P периметъра на $ABCD$, с S – сбора от лицата на четирите стени на тетраедъра, т.е. S е лицето на неговата повърхнина, с V – обема му, а с R и r – съответно радиусите на описаната и на вписаната сфери, които са определени еднозначно за всеки тетраедър.

Да се докаже, че:

1. а) $P^2 \geq 12\sqrt{3}.S + 2.[(a-b+d-e)^2+(b-c+e-f)^2+(c-a+f-d)^2]+3.[(a-d)^2+(b-e)^2+(c-f)^2]$.

б) $P^2 \geq 12\sqrt{3}.S$ и равенството е само за правилен тетраедър.

в) От всички тетраедри с дадено лице S на повърхнината най-малък периметър има правилният.

г) От всички тетраедри с даден периметър P най-голямо лице на повърхнината има правилният.

2. а) $S \geq 6.\sqrt[3]{\sqrt{3}.V^2}$ и равенството е само за правилен тетраедър.

б) От всички тетраедри с даден обем V най-малко лице на повърхнината има правилният.

в) От всички тетраедри с дадено лице S на повърхнината най-голям обем има правилният.

3. а) $P \geq 6\sqrt{2}.\sqrt[3]{3V}$ и равенството е само за правилен тетраедър.

б) От всички тетраедри с даден обем V най-малък периметър има правилният.

в) От всички тетраедри с даден периметър P най-голям обем има правилният.

4. а) $P \leq 4\sqrt{6}.R$ и равенството е само за правилен тетраедър.

б) От всички тетраедри, вписани в сфера с даден радиус R, най-голям периметър има правилният.

в) От всички тетраедри с даден периметър P най-малък радиус на описаната сфера има правилният.

5. а) $S \leq \frac{8\sqrt{3}}{3}.R^2$ и равенството е само за правилен тетраедър.

б) От всички тетраедри, вписани в сфера с даден радиус *R,* най-голямо лице на повърхнината има правилният.

в) От всички тетраедри с дадено лице S на повърхнината най-малък радиус на описаната сфера има правилният.

6. а) $V \leq \frac{8\sqrt{3}}{27}.R^3$ и равенството е само за правилен тетраедър.

б) От всички тетраедри, вписани в сфера с даден радиус *R,* най-голям обем има правилният.

в) От всички тетраедри с даден обем V най-малък радиус на описаната сфера има правилният.

7. а) $V \geq 8\sqrt{3}.r^3$ и равенството е само за правилен тетраедър.

б) От всички тетраедри, описани около сфера с даден радиус *r,* най-малък обем има правилният.

в) От всички тетраедри с даден даден обем V най-голям радиус на вписаната сфера има правилният.

8. а) $S \geq 24\sqrt{3}.r^2$ и равенството е само за правилен тетраедър.

б) От всички тетраедри, описани около сфера с даден радиус *r,* най-малко лице на повърхнината има правилният.

в) От всички тетраедри с дадено лице S на повърхнината най-голям радиус на вписаната сфера има правилният.

9. а) $P \geq 12\sqrt{6}.r$ и равенството е само за правилен тетраедър.

б) От всички тетраедри, описани около сфера с даден радиус r , най-малък периметър има правилният.

в) От всички тетраедри с даден периметър P най-голям радиус на вписаната сфера има правилният.

10. а) $R \geq 3r$ и равенството е само за правилен тетраедър.

б) Най-малката стойност на частното $\frac{R}{r}$ е 3 и се достига само за правилен тетраедър.

в) От всички тетраедри, вписани в сфера с даден радиус *R,* най-голям радиус $\frac{R}{3}$ на вписаната сфера има правилният.

г) От всички тетраедри, описани около сфера с даден радиус r, най-малък радиус $3r$ на описаната сфера има правилният.

Отговори, упътвания, решения

1. а) Най-напред ще докажем, че за триъгълник ABC с дължини a, b и c съответно на страните BC, CA и AB, лице S и мерки α, β и γ на ъглите съответно при върховете A, B и C е в сила неравенството

(1) $a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}\,.\,S_{\Delta ABC} + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$,

като равенството е само, когато $a = b = c$, т.е. само за равностранен триъгълник ABC.

От косинусовата теорема за триъгълника ABC имаме $a^2 = b^2 + c^2 - 2b\,c.\cos\alpha$, $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca.\cos\beta$, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos\gamma$. Оттук $a^2 = (b-c)^2 + 2b\,c(1-\cos\alpha)$ или

$a^2 = (b-c)^2 + 2b\,c.\sin\alpha.\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = (b-c)^2 + 4S.\dfrac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = (b-c)^2 + 4S.\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}$. Аналогично

$b^2 = (c-a)^2 + 4S.\mathrm{tg}\dfrac{\beta}{2}$, $c^2 = (a-b)^2 + 4S.\mathrm{tg}\dfrac{\gamma}{2}$ и след почленно събиране на получените три равенства, получаваме $a^2 + b^2 + c^2 = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 + 4S.(\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2} + \mathrm{tg}\dfrac{\beta}{2} + \mathrm{tg}\dfrac{\gamma}{2})$.

Съгласно резултата от Задача **3.** в [2] имаме $\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2} + \mathrm{tg}\dfrac{\beta}{2} + \mathrm{tg}\dfrac{\gamma}{2} \geq \sqrt{3}$ и така стигаме до неравенството (1), което се представя във вида $2ab+2bc+2ca-a^2-b^2-c^2 \geq 4\sqrt{3}\,.S_{\Delta ABC}$.

Прилагаме полученото неравенство за всяка от четирите стени на тетраедъра $ABCD$ и след почленно събиране получаваме:

$$2ab+2bc+2ca+2ae+2ef+2fa+2bd+2df+2fb+2cd+2de+2ec -$$

$$-(a^2+b^2+c^2+a^2+e^2+f^2+b^2+d^2+f^2+c^2+d^2+e^2) \geq 4\sqrt{3}\,.(S_{\Delta ABC}+S_{\Delta BCD}+S_{\Delta CDA}+S_{\Delta DAB}),$$

което след умножаване с 3 придобива следния вид:

(2) $6(ab+bc+ca+ae+ef+fa+bd+df+fb+cd+de+ec) - 6(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2) \geq 12\sqrt{3}\,.S$.

Разглеждаме изразите

$$P^2 = (a+b+c+d+e+f)^2 = (a+b+c)^2 + 2(a+b+c).(d+e+f) + (d+e+f)^2 =$$

$$= a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2+2ab+2bc+2ca+2ad+2ae+2af+2bd+2be+2bf+2cd+2ce+2cf+2de+2df+2ef$$

и

$$2.[(a-b+d-e)^2+(b-c+e-f)^2+(c-a+f-d)^2]+3.[(a-d)^2+(b-e)^2+(c-f)^2]=$$

$$= 2[(a-b)^2+(d-e)^2+2(a-b).(d-e)+(b-c)^2+(e-f)^2+2(b-c).(e-f)+(c-a)^2+(f-d)^2+2(c-a).(f-d)] +$$

$$+3[a^2+d^2-2ad+b^2+e^2-2be+c^2+f^2-2cf]=2(a^2+b^2-2ab+d^2+e^2-2de+2ad-2ae-2bd+2be+$$
$$+b^2+c^2-2bc+e^2+f^2-2ef+2be-2bf-2ce+2cf+c^2+a^2-2ca+d^2+f^2-2df+2cf-2cd-2af+2ad)+$$
$$+3[a^2+d^2-2ad+b^2+e^2-2be+c^2+f^2-2cf]=7(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2)-4ab-4bc-4ca+2ad-4ae-$$
$$-4af-4bd+2be-4bf-4cd-4ce+2cf-4de-4df-4ef.$$

Тяхната разлика според (2) е

$$6(ab+bc+ca+ae+ef+fa+bd+df+fb+cd+de+ec)-6(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2)\geq 12\sqrt{3}.S\,.$$

Равенството е само когато настъпва равенство в четирите неравенства за всяка от стените на тетраедъра $ABCD$, т.е. когато тези стени са равностранни триъгълници и тетраедърът е правилен.

б) Следва от а), като равенството е само за правилен тетраедър.

в) От б) имаме $P\geq\sqrt{3\sqrt{3S}}$, откъдето следва, че най-малката стойност на P е $\sqrt{3\sqrt{3S}}$ и тя се достига само за правилен тетраедър.

г) От б) имаме $S\leq\dfrac{\sqrt{3}}{36}.P^2$, откъдето следва, че най-голямата стойност на S е $\dfrac{\sqrt{3}}{36}.P^2$ и тя достига само за правилен тетраедър.

2. а) Това е задача 99. а) от [1] и там е дадено дълго и подробно решение чрез използване на описан около тетраедъра паралелепипед, който се преобразува в прав паралелепипед със същия обем и не по-малко лице на повърхнината. След това е достатъчно да се използва резултата от Задача **3.** на [3].

б) От а) следва, че най-малкото лице на повърхнината е $6.\sqrt[3]{\sqrt{3}.V^2}$ и то се достига само за правилен тетраедър.

в) От а) имаме $S^3\geq 216.\sqrt{3}.V^2$ или $V\leq 6\sqrt{6}.\sqrt[4]{3}.S\sqrt{S}$, откъдето следва, че най-големият обем е $6.\sqrt[4]{108}.S\sqrt{S}$ и той се достига само за правилен тетраедър.

3. а) От резултатите в задачи **1.** б) и **2.** а) получаваме $P^2\geq 12\sqrt{3}.S\geq 72.\sqrt{3}.\sqrt[3]{\sqrt{3}.V^2}$ или $P\geq 6\sqrt{2}.\sqrt[3]{3V}$, като равенството е само за правилен тетраедър.

б) От а) следва, че най-малкия периметър е $6\sqrt{2}.\sqrt[3]{3V}$ и той се достига само за правилен тетраедър.

в) От а) имаме $P^3\geq 1296.\sqrt{2}.V$ или $V\leq\dfrac{\sqrt{2}}{2592}.P^3$, откъдето следва, че най-големият обем е $\dfrac{\sqrt{2}}{2592}.P^3$ и той се достига само за правилен тетраедър.

4. а) В решението на Задача **4.** от [4] е доказано, че за тетраедър $ABCD$ с медицентър G и произволна точка Q е изпълнено неравенството

$$AQ^2 + BQ^2 + CQ^2 + DQ^2 \geq \frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2),$$

като равенството се достига само когато точката Q съвпада с G. Ако Q е центърът O на описаната сфера около тетраедъра $ABCD$, тогава $AQ = BQ = CQ = DQ = R$ и получаваме неравенството

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 \leq 16R^2.$$

Сега ще докажем, че

$(*)$ $P^2 \leq 6(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2) \leq 96R^2.$

В решението на Задача **1.** а) получихме

$$P^2 = (a+b+c+d+e+f)^2 = a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2 +$$

$$+2ab+2bc+2ca+2ad+2ae+2af+2bd+2be+2bf+2cd+2ce+2cf+2de+2df+2ef,$$

а чрез очевидното неравенство $(x-y)^2 \geq 0$ с равенство само за $x=y$ имаме $2xy \leq x^2 + y^2$ така, че

$$2ab \leq a^2+b^2,\ 2bc \leq b^2+c^2, \ldots, 2ef \leq e^2+f^2$$

и стигаме до $(*)$, което е равносилно на $P \leq 4\sqrt{6}.R$. Равенството е само когато $a=b=c=d=e=f$, т.е. само за правилен тетраедър.

б) От а) следва, че най-големият периметър е $4\sqrt{6}.R$ и той се достига само за правилен тетраедър.

в) От а) имаме $R \geq \frac{\sqrt{6}}{24}P$ и следва, че най-малката стойност на R е $\frac{\sqrt{6}}{24}P$, която се достига само за правилен тетраедър.

5. а) От резултатите в задачи **1.** б) и **4.** а) получаваме $S \leq \frac{\sqrt{3}}{36}.P^2$ и $P^2 \leq 96R^2$ така, че $S \leq \frac{8\sqrt{3}}{3}.R^2$ и равенството е само за правилен тетраедър.

б) От а) следва, че най-голямото лице на повърхнината е $\frac{8\sqrt{3}}{3}.R^2$ и то се достига само за правилен тетраедър.

в) От а) имаме $R \geq \frac{1}{4}\sqrt{2\sqrt{3}S}$ и следва, че най-малката стойност на R е $\frac{1}{4}\sqrt{2\sqrt{3}S}$ и тя се достига само за правилен тетраедър.

6. а) От решението на Задача **3.** в) и от резултата в Задача **4.** а) получаваме

$V \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2592}\,.\,P^3$ и $P^3 \leq 384\sqrt{6}\,.R^3$ така, че $V \leq \dfrac{8\sqrt{3}}{27}\,.R^3$ и равенството е само за правилен тетраедър.

б) От а) следва, че най-големият обем е $\dfrac{8\sqrt{3}}{27}\,.R^3$ и той се достига само за правилен тетраедър.

в) От а) имаме $R^3 \geq \dfrac{9\sqrt{3}}{8}\,.V$ или $R \geq \dfrac{3}{2\sqrt[6]{3}}.\sqrt[3]{V}$ и следва, че най-малката стойност на R е $\dfrac{3}{2\sqrt[6]{3}}.\sqrt[3]{V}$ и тя се достига само за правилен тетраедър.

7. а) Ако I е центърът на вписаната сфера в тетраедър $ABCD$, то разстоянията от I до четирите му стени е равно на r и обемът V на тетраедъра е сбор от обемите на тетраедрите $ABCI$, $BCDI$, $CDAI$ и $ABDI$, т.е.

$$V = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.r + \frac{1}{3}S_{\Delta BCD}.r + \frac{1}{3}S_{\Delta CDA}.r + \frac{1}{3}S_{\Delta ABD}\,.r.$$

Така, че $V=\dfrac{1}{3}S.r$, откъдето изразяваме $S = \dfrac{3V}{r}$ и след заместване в неравенството от Задача **2.** а) получаваме $\dfrac{3V}{r} \geq 6.\sqrt[3]{\sqrt{3}.V^2}$ или $\dfrac{27V^3}{r^3} \geq 216\sqrt{3}\,.V^2$, т.е. $V \geq 8\sqrt{3}\,.r^3$, като равенството е само за правилен тетраедър.

б) От а) следва, че най-малкият обем е $8\sqrt{3}\,.r^3$ и той се достига само за правилен тетраедър.

в) От а) имаме $r^3 \leq \dfrac{\sqrt{3}}{24}.V$ или $r \leq \dfrac{1}{2}.\sqrt[3]{\dfrac{V}{\sqrt{3}}}$ и следва, че най-малката стойност на r е $\dfrac{1}{2}.\sqrt[3]{\dfrac{V}{\sqrt{3}}}$ и тя се достига само за правилен тетраедър.

8. а) От равенството $S = \dfrac{3V}{r}$ и резултата в Задача **7.** а) получаваме $S \geq 24\sqrt{3}\,.r^2$ и равенството е само за правилен тетраедър.

б) От а) следва, че най-малкото лице на повърхнината е $24\sqrt{3}\,.r^2$ и то се достига само за правилен тетраедър.

в) От а) имаме $r^2 \leq \dfrac{\sqrt{3}}{72}\,.\,S$ или $r \leq \dfrac{\sqrt[4]{12}}{12}\,.\sqrt{S}$ и следва, че най-малката стойност на r е $\dfrac{\sqrt[4]{12}}{12}\,.\sqrt{S}$ и тя се достига само за правилен тетраедър.

9. а) От резултатите в Задачи **1.** б) и **8.** а) получаваме $P^2 \geq 12\sqrt{3}.S \geq 864.r^2$ или $P \geq 12.\sqrt{6}\,r$.

б) От а) следва, че най-малкият периметър е $24\sqrt{3}.r^2$ и той се достига само за правилен тетраедър.

в) От а) имаме $r \leq \frac{\sqrt{6}}{72}.P$ и следва, че най-малката стойност на r е $\frac{\sqrt{6}}{72}.P$ и тя се достига само за правилен тетраедър.

10. а) От Задачи **9.** а) и **4.** а) имаме $12.\sqrt{6}\,r \leq P \leq 4\sqrt{6}.R$, откъдето следва, че $R \geq 3r$ и равенството е само за правилен тетраедър.

б) От а) имаме $\frac{R}{r} \geq 3$ и следва, че най-малката стойност на частното $\frac{R}{r}$ е 3, която се достига само за правилен тетраедър.

в) От а) следва, че най-малката стойност на R е $3r$ и тя се достига само за правилен тетраедър.

г) От а) имаме $r \leq \frac{R}{3}$ и следва, че най-малката стойност на r е $\frac{R}{3}$ и тя се достига само за правилен тетраедър.

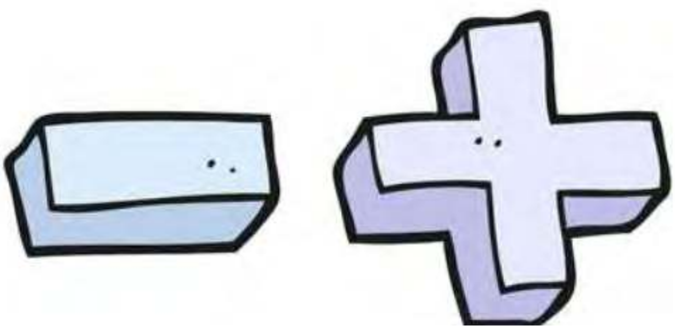
ЛИТЕРАТУРА

1. Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом. Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум, Издателство „Наука”, Москва, 1970 г.

2. Хр. Лесов. М+десет задачи за тригонометрични зависимости за триъгълник, списание „Математика плюс”, кн. 2, 2013 г., стр. 20 – 22.

3. Хр. Лесов. М+десет задачи за екстремални задачи за паралелепипеди и призми, списание „Математика плюс”, кн. 3-4, 2017 г., стр. 44 – 48.

4. Хр. Лесов. М+десет задачи за теорема на Лайбниц за тетраедър и нейни приложения, списание „Математика плюс”, кн. 2, 2018 г., стр. 28 – 33.



рубриката и ще бъдат награждавани.

ЗАДАЧИ М+

В тази рубрика, която се води от доц. д-р Веселин Ненков, се публикуват задачи за ученици от горните класове, за студенти и учители. Основният признак за подбор е оригиналност. Това не означава задължителна новост, защото твърдението, че една задача е нова, остава в сила до доказване на противното. Оригиналността включва естетичност и остроумие, а решаването на задачи с подобни качества изисква инициативност, откривателски подход, интелектуално усилие. Рубриката разчита на активното Ви участие както с решения, така и с предложения на задачи. Изпращайте ги на адрес:

1618 София,
ул. "Гусла" № 1
ВУЗФ
Росица Петрова

В писмата си посочвайте училището (университета) и класа (курса), ако сте ученик (студент). Желателно е предлаганите задачи да са напечатани в два екземпляра с кратки, но пълни решения. Ще отбелязваме имената на тези, които са направили предложенията. Ако задачата е заета, посочете източника. В писмото си поставете празен плик с точния Ви адрес. Без да извършва класиране, М+ ще обсъжда изпратените решения, а най-хубавите от тях ще намерят място на страниците на рубриката и ще бъдат награждавани.

М+595. Да се намери броят на наредените двойки (λ,μ), при които уравненията

$$\lambda=\frac{1}{x}+\frac{1}{3-4x} \text{ и } \mu=\frac{1}{4x-3}+\frac{1}{3x-4x^2}$$

имат точно по едно решение.

(Милен Найденов, гр. Варна)

М+596. Да се намерят пет различни естествени числа a, b, c, d и e, за които са изпълнени равенствата $a^2+b^3+c^4+d^5+e^6=2018$ и $b^3+c^4+d^5+e^6+a^7=2018$.

(Христо Лесов, гр. Казанлък)

М+597. Дадена е функцията

$$f(x)=x^2+2.2018x+2017.2018.$$

Да се намери броят на реалните корени на уравнението

$$\underbrace{f\left(f\left(\cdots f(x)\cdots\right)\right)}_{2018}=0.$$

(Сава Гроздев, гр. София, Веселин Ненков, с. Бели Осъм)

М+598. Дадени са окръжност k и равностранен триъгълник ABC с общ център. Ако страната на ABC е a и радиусът на k е R, да се докаже, че за произволна точка M от k е изпълнено равенството

$$MA^2+MB^2+MC^2=3R^2+a^2.$$

(Милен Найденов, гр. Варна)

М+599. Дадени са квадрат със страна a и окръжности k_1 и k_2, центровете на които съвпадат с центъра на квадрата. Ако радиусите на k_1 и k_2 са $\frac{2+\sqrt{2}}{5}a$ и $\frac{2\sqrt{2}}{5}a$, да се намери радиусът r_0 на окръжността k, допираща се до k_1, k_2 и две съседни страни на квадрата.

(Сава Гроздев, гр. София, Веселин Ненков, с. Бели Осъм)

М+600. Вътрешните за изпъкнал четириъгълник $ABCD$ точки X и Y удовлетворяват условията $\sphericalangle ABX=\sphericalangle CBY$, $\sphericalangle BCY=\sphericalangle DCX$, $\sphericalangle CDY=\sphericalangle ADX$ и $\sphericalangle DAY=\sphericalangle BAX$. Да се докажат равенствата:

$$S_{AXB}+S_{CXD}=S_{AYD}+S_{BYC} \text{ и } S_{AXD}+S_{BXC}=S_{AYB}+S_{CYD}.$$

(Хаим Хаимов, гр. Варна)

Краен срок за изпращане на решения: 15.04.2019 г.

М + Р Е Ш Е Н И Я

М+583. Да се намери при кои стойности на реалния параметър a уравнението $ax^3+(a^2-a+1)x^2+(2a^2+a-1)x+2a^3-2a^2=0$ има три различни реални корена.

(Росен Николаев, гр. Варна)

Решение. Лесно се установява, че $x=1-a$ е корен на уравнението. Като вземем предвид това, разлагаме лявата част на уравнението и то добива вида: $(ax^2+x+2a^2)(x+a-1)=0$. За да има даденото уравнение три различни реални корена, дискриминантата на квадратния тричлен трябва да е строго положителна и $1-a$ да не е негов корен, т.е. трябва да е изпълнена системата неравенства: $\left|\begin{array}{l}1-8a^3>0,\\ a(1-a)^2+1-a+2a^2\neq 0\end{array}\right.$, която от своя страна е еквивалентна с $\left|\begin{array}{l}a\in\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right),\\ a^3+1\neq 0.\end{array}\right.$ Сега, като вземем предвид, че $a\neq 0$, получаваме $a\in(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$.

М+584. Дадена е системата уравнения

$$\left|\begin{array}{l}x^2+xy+y^2=a^2,\\ y^2+yz+z^2=b^2,\\ z^2+zx+x^2=a^2-ab+b^2,\end{array}\right.$$

където $a>b>0$.

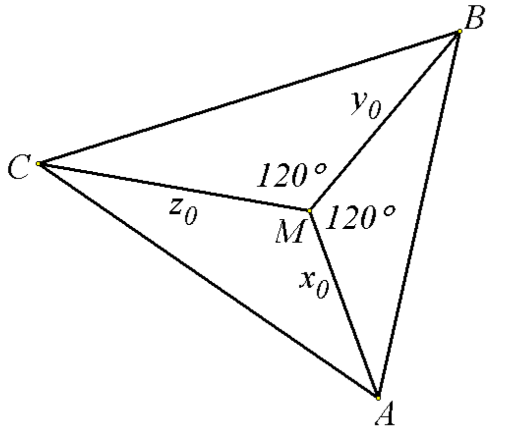
а) Ако x_0, y_0 и z_0 са положителни числа, при които (x_0,y_0,z_0) е решение на системата, да се докаже, че $z_0x_0=y_0^2$.

б) Ако x_0, y_0 и z_0 са реални числа, при които (x_0,y_0,z_0) е решение на системата, да се докаже, че $z_0x_0=y_0^2$.

в) Да се реши системата.

(Тодор Митев, гр. Русе)

Решение. а) Нека (x_0,y_0,z_0) е решение на системата. В равнината разглеждаме точките M, A, B и C, така че да са изпълнени равенствата $MA=x_0$, $MB=y_0$, $MC=z_0$, $\sphericalangle AMB=120^\circ$ и $\sphericalangle CMB=120^\circ$. Тогава от косинусовата теорема и системата следват равенствата $AB=a$, $BC=b$ и $AC=\sqrt{a^2+b^2-ab}$. Оттук и косинусовата теорема за ΔABC следва, че $\sphericalangle ABC=60^\circ$. Това означава, че $\Delta AMB\sim\Delta CMB$. Следователно $\dfrac{z_0}{y_0}=\dfrac{y_0}{x_0}$, т.е. $z_0x_0=y_0^2$.



б) От системата следва, че

$$x_0^2+x_0y_0+y_0^2+y_0^2+y_0z_0+z_0^2-\sqrt{\left(x_0^2+x_0y_0+y_0^2\right)\left(y_0^2+y_0z_0+z_0^2\right)}==z_0^2+z_0x_0+x_0^2=a^2+b^2-ab.$$

Оттук следва $\left(z_0x_0-y_0^2\right)\left(x_0+y_0+z_0\right)=0$. Лесно се вижда, че равенството $x_0+y_0+z_0=0$ е невъзможно. Следователно $z_0x_0=y_0^2$.

в) От $zx=y^2$ и първите две равенства на системата имаме $\left|\begin{array}{l} x(x+y+z)=a^2, \\ z(x+y+z)=b^2. \end{array}\right.$ Следователно $\dfrac{x}{z}=\dfrac{a^2}{b^2}$. Оттук $x^2=\dfrac{a^2b^2}{a^2+ab+b^2}$ и $y^2=\dfrac{a^2b^3}{a^2+ab+b^2}$. Сега получаваме, че решенията на системата са следните: $\left(\pm\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+ab+b^2}},\pm\dfrac{b\sqrt{ab}}{\sqrt{a^2+ab+b^2}},\pm\dfrac{b^2}{\sqrt{a^2+ab+b^2}}\right)$.

М+585. След извършване на степенуването в израза $\left(1+x+x^2+\cdots+x^{2017}\right)^3$ и сумиране на подобните едночлени пред x^k се получава коефициент C_k $\left(k=0,1,2,\ldots,6051\right)$. Да се пресметне сумата $\dfrac{1}{C_0}+\dfrac{1}{C_1}+\dfrac{1}{C_2}+\cdots+\dfrac{1}{C_{2017}}$.

(Сава Гроздев, гр. София, Веселин Ненков, с. Бели Осъм)

Решение. При $n\geq 1$ разглеждаме израза

$$\left(1+x+x^2+\cdots+x^n\right)^3=\left(1+x+x^2+\cdots+x^n\right)\left(1+x+x^2+\cdots+x^n\right)\left(1+x+x^2+\cdots+x^n\right).$$

Нека $0\leq k\leq n$. От горното равенство следва, че $x^k=x^p.x^q.x^r=x^{p+q+r}$. Следователно $p+q+r=k$. Оттук следва, че коефициентът C_k пред x^k е броят на неотрицателните решения на уравнението $p+q+r=k$ при $0\leq p\leq k$, $0\leq q\leq k$ и $0\leq r\leq k$. Нека $0\leq p\leq k$ е фиксирано число. Тогава имаме $q+r=k-p$, при $0\leq q\leq k$ и $0\leq r\leq k$. Всички двойки $\left(q,r\right)$, които са решения на последното уравнение са $\left(0,k-p\right)$, $\left(1,k-p-1\right)$, …, $\left(k-p-1,1\right)$, $\left(k-p,0\right)$. Следователно при фиксирано p уравнението $p+q+r=k$ има $k-p+1$ решения. Сега, като заместим p с 0, 1, 2, …, k, получаваме

$$C_k=(k-0+1)+(k-1+1)+(k-2+1)+\cdots+(k-k+1)=$$
$$=(k+1)+k+(k-1)+\cdots+1=\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

От получената формула следва, че

$$\frac{1}{C_0}+\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\cdots+\frac{1}{C_{n-1}}+\frac{1}{C_n}=\frac{2}{1.2}+\frac{2}{2.3}+\frac{2}{3.4}+\cdots+\frac{2}{n(n+1)}+\frac{2}{(n+1)(n+2)}=$$

$$=2\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=2\left(1-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{2(n-1)}{n+2}.$$

Следователно при $n=2017$ търсената сума е равна на $\frac{4032}{2019}$.

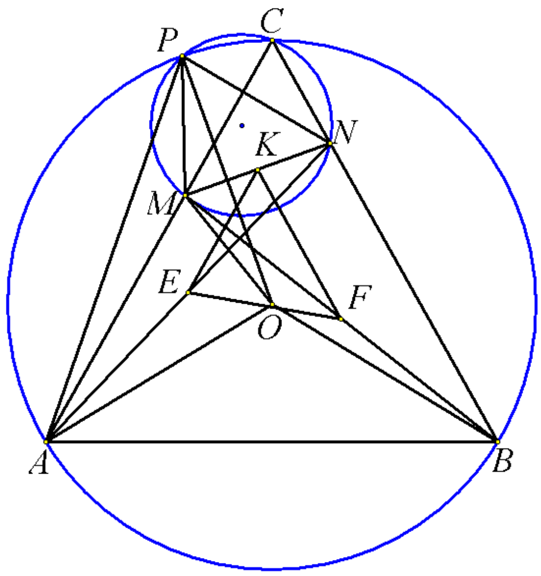
М+586. Остроъгълният триъгълник ABC е вписан в окръжност Γ с център O и радиус R. Точките M и N лежат съответно върху страните AC и BC така, че са изпълнени равенствата $\sphericalangle MON=\sphericalangle ACB$ и $\frac{AM}{MO}=\frac{BN}{NO}$.

а) Да се определи разстоянието от точката O до правата MN.

б) Ако E и F са средите съответно на отсечките AN и BM, да се докаже, че $EF>\frac{1}{2}MN$.

(Хаим Хаимов, гр. Варна)

Решение. а) Нека P е симетричната точка на O спрямо правата MN. Ще докажем, че $P\in\Gamma$, откъдето ще следва, че $OP=R$, а търсеното разстояние – $\frac{R}{2}$. Тъй като $\sphericalangle MPN=\sphericalangle MON$ и $\sphericalangle MON=\sphericalangle ACB$, то $\sphericalangle MPN=\sphericalangle ACB$. Следователно точките M, N, C и P лежат на една окръжност. Затова $\sphericalangle PMC=\sphericalangle PNC$, откъдето $\sphericalangle AMP=\sphericalangle BNP$. Тъй като по условие $\frac{AM}{MO}=\frac{BN}{NO}$, то $\frac{AM}{MP}=\frac{AM}{MO}=\frac{BN}{NO}=\frac{BN}{NP}$. Така заключаваме, че $\Delta AMP\sim\Delta BNP$. Следователно $\sphericalangle PAM=\sphericalangle PBN$, откъдето следва, че точките A, B, C и P лежат на една окръжност.



б) Означаваме средите на MN, AN и BM съответно с K, E и F. Полагаме $\frac{AM}{MO}=\frac{BN}{NO}=k$.

Ще докажем, че $EF=\frac{k}{2}MN$. Понеже $EK\parallel AM$ и $FK\parallel BN$, то $\sphericalangle EKF=\sphericalangle ACB=\sphericalangle MON$. От друга страна $EK = \frac{1}{2}AM$ и $FK = \frac{1}{2}BN$. Затова $\frac{EK}{MO} = \frac{AM}{2MO} = \frac{k}{2}$ и $\frac{FK}{NO} = \frac{BN}{2NO} = \frac{k}{2}$. Следователно $\Delta EFK \sim \Delta MNO$, откъдето $\frac{EF}{MN} = \frac{EK}{MO} = \frac{k}{2}$, т.е. $EF = \frac{k}{2}MN$. За да докажем неравенството $EF > \frac{1}{2}MN$, остава да докажем, че $k > 1$. Да допуснем, че $k \le 1$. Тогава $AM \le MO$ и $BN \le NO$, откъдето $\sphericalangle AOM \le \sphericalangle OAM$, $\sphericalangle BON \le \sphericalangle OBN$ и $\sphericalangle AOM + \sphericalangle BON \le \sphericalangle OAM + \sphericalangle OBN$. Но, ако

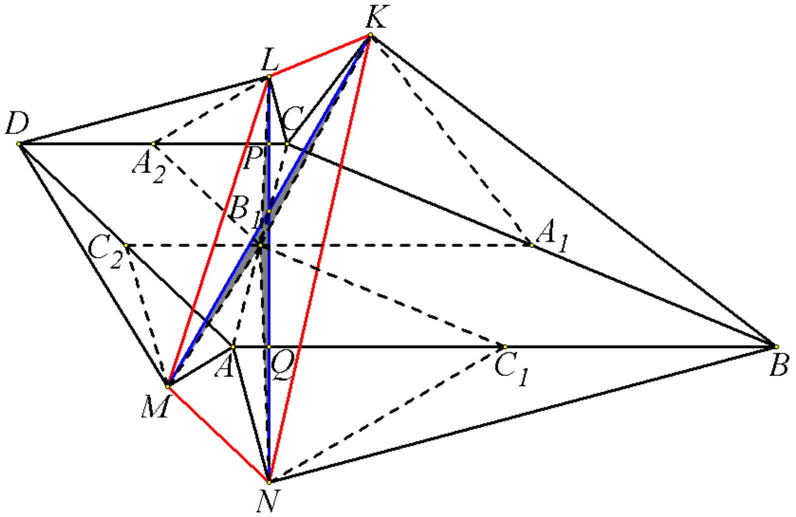
$\sphericalangle ACB = \gamma$, то $\sphericalangle AOM + \sphericalangle BON = 360° - \sphericalangle AOB - \sphericalangle MON = 360° - 3\gamma$.

Същевременно имаме $\sphericalangle OAM + \sphericalangle OBN = \sphericalangle OAC + \sphericalangle OBC = \sphericalangle AOB - \sphericalangle ACB = \gamma$. Следователно $360° - 3\gamma \le \gamma$, т.е. $\gamma \ge 90°$, което противоречи на условието. С това е установено, че $k > 1$.

М+587. Височината на трапец $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ има дължина h. Външните за $ABCD$ точки K, L, M и N са такива, че $\sphericalangle CBK = \sphericalangle CDL = \sphericalangle ADM = \sphericalangle ABN = 15°$ и $\sphericalangle BCK = \sphericalangle DCL = \sphericalangle DAM = \sphericalangle BAN = 75°$. Ако правата LN е перпендикулярна на основите на трапеца и лицето на четириъгълника $KLMN$ е два пъти по-малко от лицето на $ABCD$, да се намери дължината на средната основа на трапеца $ABCD$.

(Сава Гроздев, гр. София, Веселин Ненков, с. Бели Осъм)

Решение. Означаваме с A_1, B_1 и C_1 средите съответно на отсечките BC, CA и AB.



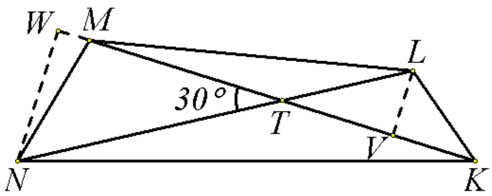
Тъй като B_1C_1 е средна отсечка в ΔABC, то $B_1C_1 = \frac{BC}{2}$ и $B_1C_1 \parallel BC$. Триъгълникът BCK има прав ъгъл при върха K, затова медианата му KA_1 е равна на половината от хипотенузата BC, т.е. $KA_1 = \frac{BC}{2}$. Следователно $B_1C_1 = KA_1$. Аналогично A_1B_1 е средна отсечка за ΔABC, а NC_1 е медиана в правоъгълния триъгълник ABN. Затова имаме $NC_1 = A_1B_1$. Освен това $\sphericalangle B_1C_1N = \sphericalangle KA_1B_1 = \sphericalangle ABC + 30°$. Следователно ΔB_1C_1N е еднакъв с ΔKB_1A_1 по първи признак. От тази еднаквост следват равенствата: $B_1N = B_1K$, $\sphericalangle NC_1B_1 = \sphericalangle A_1B_1K$, $\sphericalangle NB_1C_1 = \sphericalangle A_1KB_1$. С помощта на последното равенство получаваме:

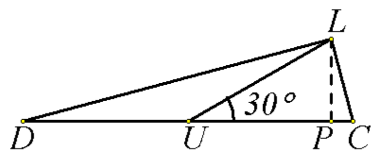
$$\sphericalangle NB_1K = \sphericalangle NB_1C_1 + \sphericalangle C_1B_1A_1 + \sphericalangle A_1B_1K = \sphericalangle NB_1C_1 + \sphericalangle C_1B_1A_1 + \sphericalangle A_1B_1K =$$
$$= \sphericalangle A_1KB_1 + \sphericalangle C_1B_1A_1 + \sphericalangle A_1B_1K = \left(\sphericalangle A_1KB_1 + \sphericalangle A_1B_1K\right) + \sphericalangle C_1B_1A_1 =$$
$$= 180^\circ - \sphericalangle B_1A_1K + \sphericalangle C_1B_1A_1 = 180^\circ - \left(\sphericalangle ABC + 30^\circ\right) + \sphericalangle ABC = 150^\circ .$$

Следователно $B_1N = B_1K$ и $\sphericalangle NB_1K = 150^\circ$. Аналогично, ако A_2 и C_2 са средите съответно на CD и AD, триъгълниците ΔB_1C_2M и ΔLB_1A_2 са еднакви и са изпълнени равенствата: $B_1M = B_1L$ и $\sphericalangle MB_1L = 150^\circ$. Сега при ротация с център B_1 и ъгъл на въртене 150° в посока обратна на часовниковата стрелка точката L отива в M, а точката N – в K, т.е. LN преминава в MK. Следователно $MK = LN$ и единият от ъглите между MK и LN е 150°.
Нека пресечната точка на диагоналите MK и LN на $KLMN$ е T. За да определим лицето четириъгълника $KLMN$, построяваме ортогоналните проекции V и W съответно на L и N върху правата KM. Тъй като LV и NW са катети в правоъгълните триъгълници TLV и TNW, лежащи срещу ъгъл, равен на 30°, то $LV = \frac{1}{2}LT$ и $NW = \frac{1}{2}NT$. Оттук следва, че

$$S_{KLMN} = S_{KML} + S_{KMN} =$$
$$= \frac{1}{2}KM.LV + \frac{1}{2}KM.NW = \frac{1}{2}KM\left(LV + NW\right) = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}KM\left(LT + NT\right) = \frac{1}{4}KM.LN .$$

Следователно $S_{KLMN} = \frac{1}{4}LN^2$.





Сега ще определим дължината на LN. За целта с P и Q означаваме пресечните точки на LN съответно с CD и AB. От условието следва, че $LP \perp CD$ и $NQ \perp AB$. Нека U е средата на CD. Тогава $\sphericalangle LUC = 30^\circ$ и $LU = \frac{1}{2}CD$. Затова от правоъгълния триъгълник LUP имаме $LP = \frac{1}{2}LU = \frac{1}{4}CD$. Аналогично се получава, че $NQ = \frac{1}{4}AB$. Следователно $LN = LP + PQ + QN = h + \frac{AB + CD}{4}$.

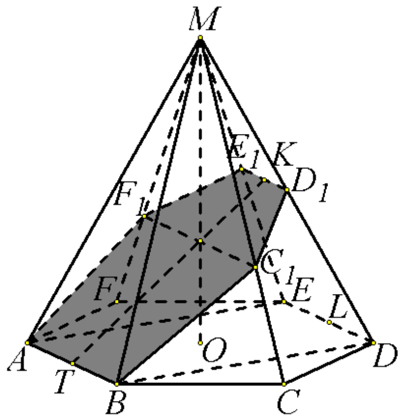
Тъй като по условие $S_{ABCD} = 2.S_{KLMN}$ и $S_{ABCD} = h.\frac{AB + CD}{2}$, то $h.\frac{AB + CD}{2} = 2.\frac{1}{4}\left(h + \frac{AB + CD}{4}\right)^2$. След преобразуване на последното равенство получаваме $\left(h - \frac{AB + CD}{4}\right)^2 = 0$, т.е. $h - \frac{AB + CD}{4} = 0$. Следователно $\frac{AB + CD}{2} = 2h$. Оттук следва, че дължината на средната основа на трапеца $ABCD$ е равна на $2h$.

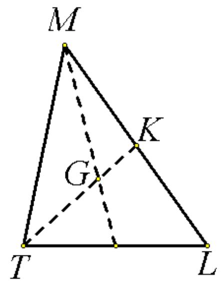
М+588. Правилна шестоъгълна пирамида се разделя на две тела от равнина α, минаваща през ръб на основата и средната отсечка на срещуположната му околна стена. Да се намери отношението на обемите на получените тела.

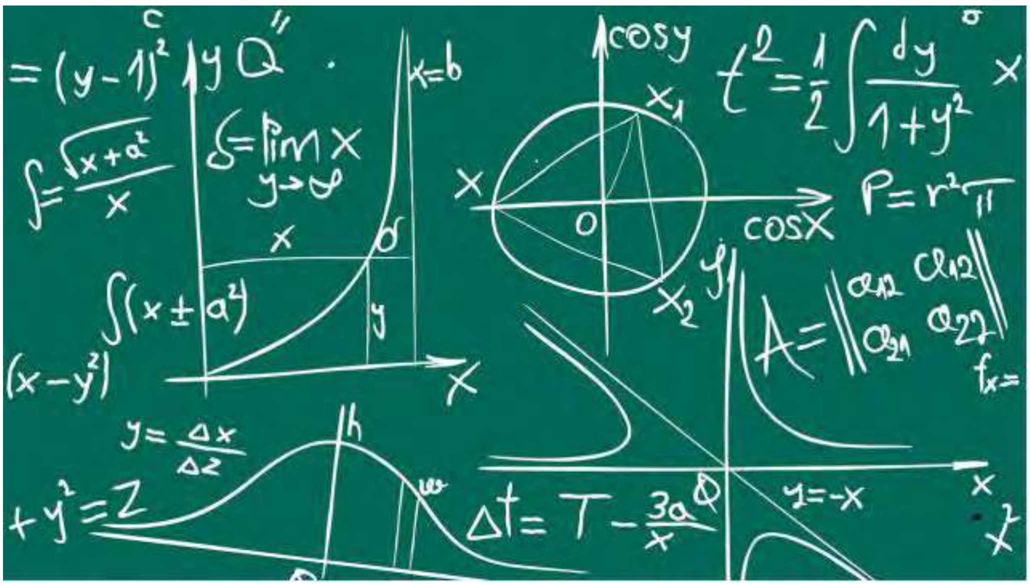
(Милен Найденов, гр. Варна)

Решение. Ще използваме означенията на чертежите. Обемът на дадената пирамида означаваме с V. За обемите на пирамидите $AEFM$, $BCDM$ и $ABDEM$ са изпълнени равенствата $V_{AEFM}=V_{BCDM}=\dfrac{V}{6}$ и $V_{ABDEM}=\dfrac{2}{3}V$. Освен това $\dfrac{V_{AE_1F_1M}}{V_{AEFM}}=\dfrac{MA.ME_1.MF_1}{MA.ME.MF}=\dfrac{1}{2}.\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$. Следователно $V_{AE_1F_1M}=\dfrac{V}{18}$. По същия начин се получава и равенството $V_{BC_1D_1M}=\dfrac{V}{18}$. Тъй като $V_{ABD_1E_1M}=\dfrac{3}{8}V_{ABDEM}=\dfrac{3}{8}.\dfrac{2}{3}V=\dfrac{V}{4}$, то $V_{ABC_1D_1E_1F_1M}=V_{AE_1F_1M}+V_{ABD_1E_1M}+V_{BC_1D_1M}=\dfrac{13}{36}V$. Сега за търсеното отношение получаваме

$$\frac{V_{ABCDEFC_1D_1E_1F_1}}{V_{ABC_1D_1E_1F_1M}}=\frac{23}{13}.$$







МЕЖДУНАРОДНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА’ 2018

Д-р М. Плюс

Домакин на 59. международна олимпиада по математика беше Румъния. Олимпиадата се проведе в гр. Клуж-Напока от 3 до 14 юли 2018 г. и в нея взеха участие 594 ученици, с 21 по-малко от миналата година. Между участниците имаше 60 девойки. Представиха се общо 107 държави, с 4 по-малко от миналогодишния рекорд 111 в Рио де Жанейро, Бразилия. Беше спазен традиционният регламент, който предвижда приблизително половината състезатели да получават медали в отношение 1 : 2 : 3 (също приблизително) на златните, сребърните и бронзовите. Журито на олимпиадата в Румъния разпредели общо 289 медала, от които 48 златни с долна граница 31 точки вкл., 98 сребърни с граници от 25 до 30 точки вкл. и 143 бронзови с граници от 16 до 24 точки вкл. Българският отбор заслужи 1 златен, 3 сребърни и 1 бронзов медал, като само един не получи медал. Общото представяне е в рамките на очакванията и затвърждава тенденцията за последните повече от 10 години България да е извън групата на водещите държави. Ако има нещо похвално в тазгодишното българско участие, то се ограничава с наличието на златен медал, който е първият след 2012 г. Заслугите за това са на учителката Петя Тодорова от СМГ, която, въпреки че без да има вина беше въвлечена в скандали от доносника Кадмий и протежето му – вече бивш директор на СМГ, успя да докаже своя професионализъм и подготви двамата най-добре представили се от българския отбор – Борислав Антов и Иван-Александър Мавров, които са нейни ученици. Останалите български участници бяха Константин Гаров (ПМГ „Н. Обрешков“, Бургас), Кирил Бангачев (СМГ “П. Хилендарски”), Атанас Динев (ПМГ „Н. Обрешков“, Бургас) и Кристиян Василев. В отборното класиране България е на незавидното 21. място със 146 точки, “заслугата” за което е без съмнение на еднометровия главен лаборант от Лабораторията на Пазарджишкия доносник Кадмий. Добри деца, добри учители, но калпава заключителна подготовка, калпаво “научно” ръководство и резултатите са налице.

Победители в тазгодишната олимпиада са двама ученици, постигнали максималните 42 точки – Джеймс Лин от САЩ и Агнио Банержи от Великобритания. По-долу са резултатите на нашите състезатели, както и класирането по държави.

59. МЕЖДУНАРОДНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА – 2018 Г.

КЛАСИРАНЕ И РЕЗУЛТАТИ НА БЪЛГАРСКИТЕ УЧЕНИЦИ

резултати по задачи	I	II	III	IV	V	VI	точки	място	медал
Борислав Антов	7	7	2	7	7	1	31	34-48	златен
Иван-Александър Мавров	7	7	0	7	7	2	30	49-60	сребърен
Константин Гаров	7	7	0	7	6	2	29	61-86	сребърен
Кирил Бангачев	7	3	0	7	7	1	25	131-146	сребърен
Атанас Динев	7	4	0	7	1	0	19	215-227	бронзов
Кристиан Василев	7	2	0	0	1	2	12	338-349	–
отборен резултат	42	30	2	35	29	8	146	21	

59. МЕЖДУНАРОДНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА – 2018 Г.

КЛАСИРАНЕ И РЕЗУЛТАТИ ПО ДЪРЖАВИ

№ по ред	Д Ъ Р Ж А В А	Брой участници	Зад.1	Зад.2	Зад.3	Зад.4	Зад.5	Зад.6	Общо точки	Зл.	Ср.	Бр.
1	САЩ	6	42	41	14	42	42	31	212	5	1	0
2	Русия	6	42	42	11	42	41	23	201	5	1	0
3	Китай	6	42	37	17	42	42	19	199	4	2	0
4	Украйна	6	42	34	12	42	42	14	186	4	2	0
5	Тайланд	6	42	38	3	42	42	16	183	3	3	0
6	Тайван	6	42	42	15	37	25	18	179	3	1	2
7	Корея	6	42	42	3	42	36	12	177	3	3	0
8	Сингапур	6	41	42	3	42	37	10	175	2	3	1
9	Полша	6	42	39	7	42	37	7	174	1	5	0
10	Индонезия	6	42	38	3	42	36	10	171	1	5	0
11	Австралия	6	42	34	13	42	31	7	169	2	3	1
12	Великобритания	6	42	30	7	37	33	12	161	1	4	0
13	Япония	6	40	37	3	32	36	10	158	1	3	2
13	Сърбия	6	42	37	5	35	35	4	158	2	2	2
15	Унгария	6	42	28	2	41	35	9	157	0	4	2
16	Канада	6	42	27	1	42	36	8	156	0	5	1

№ по ред	ДЪРЖАВА	Брой уча-стни-ци	Зад.1	Зад.2	Зад.3	Зад.4	Зад.5	Зад.6	Общо точки	Зл.	Ср.	Бр.
17	Италия	6	42	31	1	37	37	6	154	0	4	2
18	Казахстан	6	42	29	0	42	33	5	151	0	4	2
19	Иран	6	42	37	6	39	18	8	150	1	3	1
20	Виетнам	6	42	40	7	25	29	5	148	1	2	3
21	**България**	**6**	**42**	**30**	**2**	**35**	**29**	**8**	**146**	**1**	**3**	**1**
22	Хърватия	6	35	33	0	36	38	3	145	0	4	1
23	Словакия	6	37	28	0	42	32	1	140	0	3	3
24	Швеция	6	42	23	5	42	24	2	138	1	2	2
24	Турция	6	42	30	7	31	26	2	138	1	1	4
26	Израел	6	38	30	2	31	26	9	136	0	2	4
27	Грузия	6	42	17	0	40	23	11	133	0	1	5
28	Бразилия	6	35	30	1	42	13	11	132	1	0	4
28	Индия	6	36	28	0	28	33	7	132	0	3	2
28	Монголия	6	42	28	0	42	18	2	132	0	1	5
31	Германия	6	30	23	3	42	24	9	131	1	2	1
32	Армения	6	42	25	0	37	26	0	130	0	2	4
33	Франция	6	30	22	1	42	23	11	129	1	1	4
33	Румъния	6	41	33	0	25	24	6	129	1	1	2
35	Перу	6	42	24	0	33	24	2	125	0	2	3
36	Мексико	6	36	20	0	38	23	6	123	0	1	4
36	Холандия	6	35	22	0	42	23	1	123	0	1	4
38	Филипини	6	42	26	3	33	16	1	121	1	1	2
39	Аржентина	6	36	16	0	39	22	2	115	0	1	4
39	Чехия	6	36	22	0	35	19	3	115	0	2	2
41	Бангладеш	6	42	30	3	27	10	2	114	1	0	3
42	Словения	6	33	14	4	37	14	2	104	0	1	1
43	Босна и Херцеговина	6	39	17	0	36	10	1	103	0	0	4
43	Таджикистан	6	42	27	0	16	17	1	103	0	0	5
45	Беларус	6	32	14	1	28	25	2	102	0	0	4

№ по ред	Д Ъ Р Ж А В А	Брой уча-стни-ци	Зад.1	Зад.2	Зад.3	Зад.4	Зад.5	Зад.6	Общо точки	Зл.	Ср.	Бр.
45	Нова Зеландия	6	35	19	0	34	14	0	102	0	1	2
47	Белгия	6	35	16	0	28	10	3	92	0	0	4
48	Малайзия	6	35	18	0	18	18	1	90	0	0	2
49	Хонг Конг	6	32	22	0	14	17	4	89	0	0	2
50	Молдова	6	35	14	0	18	16	3	86	0	0	3
51	Естония	6	25	16	0	26	12	1	80	0	1	0
52	Литва	6	35	10	0	20	12	0	77	0	0	2
52	Португалия	6	24	13	0	28	11	1	77	0	0	2
54	Гърция	6	36	11	0	16	9	2	74	0	0	2
54	Испания	6	36	9	0	18	11	0	74	0	0	2
56	Норвегия	6	21	11	0	24	15	2	73	0	0	2
57	Австрия	6	15	18	0	20	19	0	72	0	0	3
58	Дания	6	23	15	0	22	10	1	71	0	0	3
59	Финландия	6	21	13	0	25	10	1	70	0	0	2
60	Саудитска Арабия	6	22	16	0	15	14	2	69	0	1	1
60	Сирия	6	30	13	0	9	17	0	69	0	0	2
62	Южна Африка	6	31	9	0	16	9	1	66	0	0	1
63	Коста Рика	5	29	7	0	19	10	0	65	0	0	2
63	Туркменистан	6	36	9	0	16	3	1	65	0	0	1
65	Макао	6	31	12	0	13	5	0	61	0	0	1
66	Колумбия	6	29	9	0	16	3	2	59	0	0	1
67	Исландия	6	22	4	0	27	3	0	56	0	0	1
68	Швейцария	6	13	11	0	23	5	0	52	0	0	1
69	Азербайджан	6	28	8	0	9	3	2	50	0	0	0
70	Тунис	6	27	7	0	10	5	0	49	0	0	0
71	Еквадор	6	19	4	0	19	4	2	48	0	0	0
72	Шри Ланка	6	28	6	0	9	4	0	47	0	0	1
73	Мароко	6	27	6	0	6	6	1	46	0	0	0
73	Пуерто Рико	6	19	4	0	13	10	0	46	0	0	1

№ по ред	Д Ъ Р Ж А В А	Брой участници	Зад.1	Зад.2	Зад.3	Зад.4	Зад.5	Зад.6	Общо точки	Зл.	Ср.	Бр.
75	Кипър	5	13	11	0	18	3	0	45	0	0	1
76	Ирландия	6	19	2	0	19	2	1	43	0	0	1
77	Киргизстан	6	28	5	0	7	1	0	41	0	0	0
78	Латвия	6	9	12	0	13	5	1	40	0	0	0
79	Албания	6	19	3	0	6	9	0	37	0	0	0
80	Пакистан	6	21	3	0	6	5	0	35	0	0	0
81	Боливия	6	27	1	0	3	2	0	33	0	0	0
82	Македония	6	20	2	0	3	1	1	27	0	0	0
83	Нигерия	3	19	3	0	2	0	2	26	0	0	0
83	Тринидад и Тобаго	3	9	5	0	8	3	1	26	0	0	0
85	Мианмар	6	14	2	0	6	1	0	23	0	0	0
86	Косово	6	14	1	0	3	1	2	21	0	0	0
86	Панама	4	14	1	0	6	0	0	21	0	0	0
86	Узбекистан	3	16	4	0	1	0	0	21	0	0	0
89	Черна Гора	4	8	7	0	4	1	0	20	0	0	0
89	Ел Салвадор	2	14	3	0	2	1	0	20	0	0	0
91	Чили	4	1	2	0	14	2	0	19	0	0	0
92	Алжир	4	10	2	0	4	1	1	18	0	0	0
93	Люксембург	2	7	3	0	4	0	0	14	0	0	0
94	Гана	5	8	3	0	2	0	0	13	0	0	0
95	Ботсвана	6	7	0	0	4	1	0	12	0	0	0
95	Парагвай	6	7	0	0	2	3	0	12	0	0	0
97	Камбоджа	6	11	0	0	0	0	0	11	0	0	0
97	Гватемала	3	1	1	0	7	2	0	11	0	0	0
99	Египет	4	1	2	0	7	0	0	10	0	0	0
100	Ирак	6	7	0	0	1	1	0	9	0	0	0
100	Уганда	4	8	0	0	0	0	1	9	0	0	0
102	Кот д'Ивоар	6	8	0	0	0	0	0	8	0	0	0
103	Уругвай	4	0	3	0	1	3	0	7	0	0	0

№ по ред	Д Ъ Р Ж А В А	Брой уча-стни-ци	Зад.1	Зад.2	Зад.3	Зад.4	Зад.5	Зад.6	Общо точки	Зл.	Ср.	Бр.
104	Хондурас	3	2	1	0	2	1	0	6	0	0	0
105	Непал	6	2	0	0	1	2	0	5	0	0	0
106	Венецуела	1	1	1	0	0	0	0	2	0	0	0
107	Танзания	3	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0

Ето задачите от 59-ата международна олимпиада по математика:

Понеделник, 9 юли 2018 г.

Задача 1. Нека Γ е описаната окръжност около остроъгълен триъгълник ABC, а D и E са точки съответно върху страните AB и AC така, че $AD = AE$. Ако симетралите на отсечките BD и CE пресичат малките дъги AB и AC на Γ съответно в точки F и G, да се докаже, че правите DE и FG са успоредни или съвпадат.

Задача 2. Да се намерят всички естествени числа $n \geq 3$, за които съществуват реални числа $a_1, a_{2,} \ldots, a_{n+2}$ така, че $a_{n+1} = a_1$, $a_{n+2} = a_2$ и

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2} \text{ за всяко } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Задача 3. Равностранен триъгълен масив от числа се нарича *триъгълник анти Паскал*, ако притежава следното свойство: всяко число, което не е в последния ред, е равно на абсолютната стойност на разликата на двете числа непосредствено под него. По-долу е показан пример на триъгълник анти Паскал с четири реда, образуван с помощта на естествените числа от 1 до 10.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 4 & & & \\ & & 2 & & 6 & & \\ & 5 & & 7 & & 1 & \\ 8 & & 3 & & 10 & & 9 \end{array}$$

Съществува ли триъгълник анти Паскал с 2018 реда, образуван с помощта на естествените числа от 1 до $1+2+\ldots+2018$?

Време за работа: 4 часа и 30 минути
Всяка задача се оценява със 7 точки

Вторник, 10 юли 2018 г.

Задача 4. Точката (x, y) в равнината се нарича *възел*, ако x и y са естествени числа, ненадминаващи 20. Първоначално всичките 400 възела са незаети. Мария и Иван последователно правят ходове, като поставят камъчета във възлите. Мария започва първа. Когато Мария е на ход, тя поставя ново червено камъче в незает възел така, че разстоянието между кои да е два възела, заети от червени камъчета, да не е равно на $\sqrt{5}$. Когато Иван е на ход, той поставя ново синьо камъче в незает възел. (Възел, зает от синьо камъче, може да е на всякакво разстояние от зает възел.) Играта завършва, когато някой от играчите не може да направи ход. Да се намери максималното число *K*, за което Мария може да постави поне *K* червени камъчета, както и да играе Иван.

Задача 5. Известно е, че за безкрайната редица от естествени числа $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ съществува естествено число $N > 1$ така, че за всяко $n \geq N$ числото

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

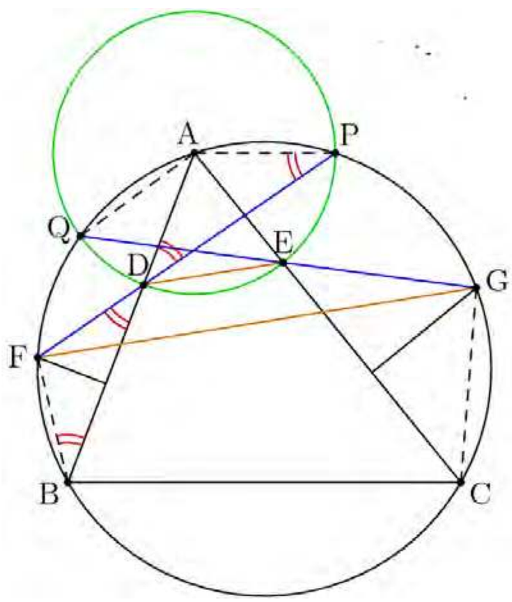
е цяло. Да се докаже, че съществува естествено число M така, че $a_m = a_{m+1}$ за всяко $m \geq M$.

Задача 6. Даден е изпъкнал четириъгълник $ABCD$, за който $AB.CD = BC.DA$. Нека X е такава вътрешна точка за четириъгълника, че $\angle XBA = \angle XDC$ и $\angle XCB = \angle XAD$. Да се докаже, че $\angle BXA + \angle DXC = 180^0$.

Време за работа: 4 часа и 30 минути
Всяка задача се оценява със 7 точки

Решение на задача 1.

Нека правите *FD* и *GE* пресичат *Г* за втори път съответно в точките *P* и *Q*. Имаме $\angle APF = \angle FBA$ (измерват се с една и съща дъга) $= \angle FDB$ (*F* лежи на симетралата на *BD*) $= \angle ADP$ (връхни), т.е. $\angle APD = \angle ADP$, откъдето $AP = AD$. По същия начин, като използваме, че *G* лежи на симетралата на *CE*, заключаваме, че $AQ = AE$. Сега от условието $AD = AE$ следва, че $AP = AQ$, както и че точките *Q*, *D*, *E* и *P* лежат на окръжност с център *A*. Тогава $\angle QED = \angle QPD$ (измерват се с една и съща дъга от тази окръжност). Но $\angle QPD = \angle QPF = \angle QGF$ (измерват се с една и съща дъга от *Г*). Получаваме, че $\angle QED = \angle QGF$. Сега задачата следва от факта, че последните два ъгъла са съответни при пресичането на правите *DE* и *FG* с правата *QG*.



Решение на задача 2.

Нека $a_{n+3} = a_3$. Ако умножим двете страни на равенството $a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$ по a_{i-1} за всяко $i = 2, 3, ..., n,\ n+1$, получаваме

$$a_{i-1}a_i a_{i+1} + a_{i-1} = a_{i-1}a_{i+2} \Leftrightarrow (a_{i+1} - 1)a_{i+1} + a_{i-1} = a_{i-1}a_{i+2} \Leftrightarrow a_{i+1}^2 - a_{i+1} + a_{i-1} = a_{i-1}a_{i+2}.$$

След сумиране имаме $\sum_{i=2}^{n+1} a_{i-1}a_{i+2} = \sum_{i=2}^{n+1} a_{i+1}^2 - \sum_{i=2}^{n+1} a_{i+1} + \sum_{i=2}^{n+1} a_{i-1} = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$, т.е. $\sum_{i=1}^{n} a_i a_{i+3} = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$. За всяко $i = 1, 2, ..., n$ ще използваме неравенството $a_i a_{i+3} \le \dfrac{a_i^2 + a_{i+3}^2}{2}$, в което равенство се достига при $a_i = a_{i+3}$. След сумиране имаме

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i a_{i+3} \le \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2 + a_{i+3}^2}{2} = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 .$$

Оттук следва, че $a_i a_{i+3} = \dfrac{a_i^2 + a_{i+3}^2}{2}$ за всяко $i = 1, 2, ..., n$ и значи $a_i = a_{i+3}$ за всяко $i = 1, 2, ..., n$.

Възможни са няколко случая:

<u>*Първи случай*</u>. $n \equiv 1 (\operatorname{mod} 3)$. Тогава

$$a_1 = a_4 = a_7 = ... = a_n = a_{n+3} = a_3 = a_6 = a_9 = ... = a_{n-1} = a_{n+2} = a_2 = a_5 = a_8 = ... = a_{n-2} = a_{n+1} = a_1,$$

т.е. $a_1 = a_2 = ... = a_{n+2}$. От условието $a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$ следва например, че $a_1^2 - a_1 + 1 = 0$, което не е възможно, защото уравнението $x^2 - x + 1 = 0$ няма реални корени.

<u>*Втори случай*</u>. $n \equiv 2 (\operatorname{mod} 3)$. Тогава

$$a_2 = a_5 = a_8 = ... = a_n = a_{n+3} = a_3 = a_6 = a_9 = ... = a_{n-2} = a_{n+1} = a_1 = a_4 = a_7 = ... = a_{n-1} = a_{n+2} = a_2,$$

т.е. отново $a_1 = a_2 = ... = a_{n+2}$, което, както и по-горе, е невъзможно.

<u>*Трети случай*</u>. $n \equiv 0 (\operatorname{mod} 3)$. Това е единствената възможност, която води до решение на задачата. Тя се реализира например при

$$2, -1, -1,\ 2, -1, -1, ...,\ 2, -1, -1,\ 2, -1.$$

Задачата може да се реши и с използване на т. нар. „пренареждащо неравенство”, което гласи следното:

Ако $x_1 \le x_2 \le ... \le x_n$ и $y_1 \le y_2 \le ... \le y_n$ са две редици от реални числа, то

$$x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + ... + x_n y_1 \le x_1 y_{\sigma(1)} + x_2 y_{\sigma(2)} + ... + x_n y_{\sigma(n)} \le x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n,$$

където $\sigma(1)$, $\sigma(2)$, …, $\sigma(n)$ е произволна пермутация на числата 1, 2, …, n.

В конкретния случай можем да считаме, че след евентуално преномериране е изпълнено $a_1 \le a_2 \le ... \le a_n$. Нека $x_i = y_i = a_i$ за всяко $i = 1, 2, ..., n$. Доказаното по-горе равенство $\sum_{i=1}^{n} a_i a_{i+3} = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$ може да се запише във вида $\sum_{i=1}^{n} x_i y_{i+3} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, откъдето следва, че $\sigma(1) = 4$, $\sigma(2) = 7$, …, $\sigma(n-3) = n-3$, $\sigma(n-2) = 1$, $\sigma(n-1) = 2$, $\sigma(n) = 3$, т.е. $\sum_{i=1}^{n} x_i y_{\sigma(i)} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ Ще докажем, че $y_1 = y_4$. Да допуснем противното, т.е. $y_4 > y_1$. Но тогава $y_{n-2} \ge y_4 > y_1$, откъдето $(y_4 - y_1)(y_{n-2} - y_1) > 0$, т.е. $y_1^2 + y_{n-2}y_4 > y_1 y_4 + y_{n-2}y_1$. Последното е еквивалентно с $x_1 y_1 + x_{n-2}y_4 > x_1 y_4 + x_{n-2}y_1$. Двете събираеми в дясната страна на това неравенство фигурират в сумата $\sum_{i=1}^{n} x_i y_{\sigma(i)}$ и ако към двете страни на неравенството прибавим останалите събираеми от тази сума, ще получим $\sum_{i=1}^{n} x_i y_{\tau(i)} > \sum_{i=1}^{n} x_i y_{\sigma(i)}$, където пермутацията τ е получена от пермутацията σ, в която са разменени местата на $\sigma(1)$ и $\sigma(n-2)$. От друга страна, съгласно пренареждащото неравенство имаме $\sum_{i=1}^{n} x_i y_{\tau(i)} \le \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ и следователно

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \ge \sum_{i=1}^{n} x_i y_{\tau(i)} > \sum_{i=1}^{n} x_i y_{\sigma(i)} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i ,$$

което е противоречие. Като използваме процедурата от разгледаните по-горе три случая, отново заключаваме, че редицата с исканото свойство е периодична с период 3.

Коментарът, който може да се направи, е, че това е една хубава задача за неравенство, което е скрито във функционално уравнение (относно функция f от $\{1, 2, ..., n\}$ в множеството на реалните числа).

Решение на задача 3.

Преди да изложим решение на тази задача, която се оказва частен случай на доказаното по-долу твърдение 12, ще направим някои наблюдения и ще докажем твърдения, някои от които не са свързани непосредствено с решението на задача 3, но осветляват триъгълниците анти Паскал. Първоначално ще се спрем на самото наименование. През 1654 г. в своя „Трактат за аритметичния триъгълник” френският математик Блез Паскал (1623 – 1662) въвежда следната безкрайна триъгълна таблица от числа:

$$\begin{array}{ccccccccc} &&&&1&&&& \\ &&&1&&1&&& \\ &&1&&2&&1&& \\ &1&&3&&3&&1& \\ 1&&4&&6&&4&&1 \end{array}$$

....

Тази таблица се нарича *триъгълник на Паскал*. Всеки ред с номер n отгоре надолу в триъгълника на Паскал е съставен от последователните биномни коефициенти $\binom{n}{k}$ $(k = 0, 1, ..., n)$ в развитието на Нютоновия бином $(a+b)^n$. Кое да е число в триъгълника без периферните единици е сбор на числата, намиращи се непосредствено над него. Това обосновава понятието *триъгълник анти Паскал* от условието на разглежданата задача 3. Да отбележим, че свойството на триъгълника на Паскал интерпретира добре известното свойство на биномните коефициенти

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k},$$

което се нарича *правило на Паскал*.

Нека Δ_n е триъгълник анти Паскал от ред *n*. С елементите на Δ_n ще конструираме две редици $b_1, b_2, .., b_n$ и $s_1, s_2, .., s_n$ по следния начин: нека $b_1 = s_1$ е най-горното число в Δ_n; b_2 е по-голямото от двете числа непосредствено под b_1, а s_2 е по-малкото от тях, …, нека b_k е по-голямото от двете числа непосредствено под b_{k-1}, а s_k е по-малкото от тях за всяко $k = 3, 4, ..., n$. Членовете на двете редици ще наричаме съответно големи (big – *b*) и малки (small – *s*) числа. В примера от условието на задачата големите числа са 4, 6, 7 и 10, а малките са 4, 2, 1 и 3. Да обърнем внимание, че b_k е най-голямото число измежду числата на k-ия ред на Δ_n за всяко $k = 1, 2, ..., n$.

Наблюдение 1. Тъй като $b_{k-1} = b_k - s_k$ ($k = 1, 2, ..., n$), то $b_k = b_{k-1} + s_k$ и следователно $b_n = b_{n-1} + s_n = b_{n-2} + s_{n-1} + s_n = ... = b_2 + s_3 + s_4 + ... + s_n = b_1 + s_2 + ... + s_n = s_1 + s_2 + ... + s_n$.

Дефиниция 1. Частен случай на Δ_n е, когато триъгълникът е образуван с числата от 1 до $1 + 2 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Такъв триъгълник ще означаваме с TAP_n (използваме първите букви на понятието „триъгълник анти Паскал”).

Твърдение 1. За триъгълника TAP_n е изпълнено $\{s_1, s_2, ..., s_n\} = \{1, 2, ..., n\}$.

Доказателство: Нека $m_1 < m_2 < ... < m_n$ са n-те най-малки елементи на TAP_n. Тогава $s_1 + s_2 + ... + s_n \geq m_1 + m_2 + ... + m_n = 1 + 2 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Заключаваме, че

$$\frac{n(n+1)}{2} \geq b_n = s_1 + s_2 + ... + s_n \geq m_1 + m_2 + ... + m_n = 1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

и следователно $\{s_1, s_2, ..., s_n\} = \{1, 2, ..., n\}$.

Наблюдение 2. От доказателството на твърдение 1. следва, че за всеки TAP_n е изпълнено $b_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Оттук в частност заключаваме, че най-големият елемент на TAP_n е разположен в най-долния ред на триъгълника.

Наблюдение 3. Пак от твърдение 1. следва, че числото от най-горния ред на TAP_n не може да е по-голямо от n.

Наблюдение 4. За всеки TAP_n числата от 1 до n са разположени по едно на ред. Това е така, защото числата s_k са разположени по едно на ред.

С помощта на твърдение 1. и направените наблюдения ще конструираме някои TAP_n за конкретни стойности на n.

Твърдение 2. При $n = 1$ единственият TAP_1 е числото 1.

Твърдение 3. При $n = 2$ са възможни четири случая на TAP_2:

	1			1			2			2	
3		2	2		3	3		1	1		3

Това са единствените случаи, защото от наблюдение 3. следва, че числото на най-горния ред може да бъде само 1 или 2, всяко от които се представя по единствен начин като разлика на другите две.

Тъй като първият и вторият пример, а така също третият и четвъртият, са симетрични спрямо вертикалната ос на симетрия на триъгълника, ще считаме, че те са еднакви, т.е. при $n = 2$ възможните TAP_2 са два.

Твърдение 4. При $n = 3$ са възможни четири случая на TAP_3, считайки симетричните за еднакви:

1	2	3	3
4 3	5 3	4 1	5 2
6 2 5	6 1 4	2 6 5	1 6 4

Отново сме взели предвид, че съгласно наблюдение 3. числото на най-горния ред може да бъде само 1, 2 или 3.

Твърдение 5. При $n = 4$ са възможни също четири случая на TAP_4, считайки симетричните за еднакви:

3	3	4	4
5 2	7 4	5 1	6 2
4 9 7	2 9 5	2 7 6	1 7 5
6 10 1 8	8 10 1 6	8 10 3 9	9 10 3 8

Твърдение 6. При $n = 5$ съществува само един TAP_5 с точност до симетрия:

5
9 4
2 11 7
10 12 1 8
13 3 15 14 6

Доказателство: Ще докажем тази единственост, като разсъжденията могат да се използват за обосноваване на примерите за TAP_n при $n < 5$. Числото на най-горния ред не може да е 1, 2, 3 или 4. Ако е 1, то числата на втория ред трябва да са 6 и 5. В противен случай ще бъде нарушено свойството съгласно наблюдение 4. Но тогава за всяка от евентуалните тройки на третия ред $(2,8,3)$, $(3,9,4)$ и $(4,10,5)$ ще бъде отново нарушено свойството от наблюдение 4. Ако числото на най-горния ред е 2, то числата на втория ред трябва да са 6 и 4 или 7 и 5. В първия случай $(6,4)$ единствено възможна тройка на третия ред е $(5,11,7)$, но не съществува подходяща четворка за четвъртия ред. Във втория случай $(7,5)$ единствено възможна тройка на третия ред е $(4,11,6)$, за която също не съществува подходяща четворка за четвъртия ред. Ако числото на най-горния ред е 3, то числата на втория ред трябва да са 7 и 4 или 8 и 5. Тази възможност също се отхвърля с аналогични разсъждения. Ако числото на най-горния ред е 4, то числата на втория ред трябва да са 6 и 2, 7 и 3 или 9 и 5. В първия случай $(6,2)$ единствено възможната тройка на третия ред е $(13,7,5)$, но не съществува подходяща четворка за четвъртия ред. Във втория случай $(7,3)$ не съществува подходяща тройка за третия ред. В третия случай $(9,5)$ единствено възможната тройка на третия ред е $(10,1,6)$, но не съществува подходяща четворка за четвъртия ред.

Единствеността на примера за TAP_5 се установява по редове отгоре надолу по аналогичен начин.

Твърдение 7. Не съществува TAP_6.

Доказателство: Да допуснем, че такъв триъгълник съществува и да означим елементите му в най-долния ред с *a*, *b*, *c*, *d*, *e* и *f* в тази последователност. Ще разглеждаме числата по модул 2. Тогава изваждането може да се замени със събиране. Елементите във втория ред отдолу нагоре са $a+b, b+c, c+d, d+e$ и $e+f$, елементите на третия ред по модул 2 са $a+c, b+d, c+e$ и $e+f$, на четвъртия ред по модул 2 са $a+b+c+d, b+c+d+e$ и $c+d+e+f$, на петия ред по модул 2 са $a+e$ и $b+f$, а на шестия ред е числото $a+b+e+f$. Сумата на всички елементи е $6a+8b+bc+8d+8e+6f$, което е четно число. От друга страна $1+2+3+...+21=231$ е нечетно число и това е противоречие.

$$\begin{array}{c}
a+b+e+f \\
a+e \quad b+f \\
a+b+c+d \quad b+c+d+e \quad c+d+e+f \\
a+c \quad b+d \quad c+e \quad d+f \\
a+b \quad b+c \quad c+d \quad d+e \quad e+f \\
a \quad b \quad c \quad d \quad e \quad f
\end{array}$$

Да разгледаме примера TAP_5 и да отделим редиците $\{b_k\}_{k=1}^{5}$ и $\{s_k\}_{k=1}^{5}$ с линии, както е показано:

$$\begin{array}{c}
5 \\
9 \quad 4 \\
2 \quad 11 \quad 7 \\
10 \quad 12 \quad 1 \quad 8 \\
13 \quad 3 \quad 15 \quad 14 \quad 6
\end{array}$$

Отделянето става, като вляво и вдясно от двойката (b_5, s_5) прекараме прави, които сключват остър ъгъл 60^0 с основата на TAP_5. Това, което остава вляво и вдясно, са два равностранни триъгълника – първият с размер 1 (един ред), а вторият с размер 2 (два реда). Двата триъгълника са всъщност следните:

$$\Delta_1 \text{ (числото 13) и } \Delta_2 = \begin{array}{c} 8 \\ 14 \quad 6 \end{array}$$

Да обърнем внимание, че сборът от размерите на двата триъгълника е 3 , което е с 2 по-малко от размера на TAP_5, който е 5.

По подобен начин можем да направим отделяне в примерите TAP_4:

$$\begin{array}{c} 3 \\ 5 \quad 2 \\ 4 \quad 9 \quad 7 \\ 6 \quad 10 \quad 1 \quad 8 \end{array} \qquad
\begin{array}{c} 3 \\ 7 \quad 4 \\ 2 \quad 9 \quad 5 \\ 8 \quad 10 \quad 1 \quad 6 \end{array} \qquad
\begin{array}{c} 4 \\ 5 \quad 1 \\ 2 \quad 7 \quad 6 \\ 8 \quad 10 \quad 3 \quad 9 \end{array} \qquad
\begin{array}{c} 4 \\ 6 \quad 2 \\ 1 \quad 7 \quad 5 \\ 9 \quad 10 \quad 3 \quad 8 \end{array}$$

Сборът от размерите на оставащите триъгълници е $1+1=2=4-2$.

За примерите TAP_3 имаме:

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & 1 & & \\
 & 4 & & 3 & / \\
6 & & 2 & / & 5
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccc}
 & & 2 & & \\
 & 5 & & 3 & / \\
6 & & 1 & / & 4
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccc}
 & & 3 & & \\
 & 4 & & 1 & / \\
2 & & 6 & / & 5
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccc}
 & & 3 & & \\
 & 5 & & 2 & / \\
1 & & 6 & / & 4
\end{array}
$$

При всеки от тях размерът на оставащия триъгълник е $1 = 3 - 2$ (т.е. оставащият триъгълник се състои от едно число: 5, 4, 5 или 4 за всеки от случаите).

Наблюдение 5. При отделяне на редиците $\{b_k\}_{k=1}^{n}$ и $\{s_k\}_{k=1}^{n}$ от даден TAP_n с помощта на прави линии вляво и вдясно от двойката (b_n, s_n), които сключват остър ъгъл 60^0 с основата на TAP_n, остават два триъгълника (или само един, ако двойката (b_n, s_n) е в края на реда), сумата от размерите на които е равна на $n-2$ (ако триъгълникът е един, неговият размер е $n-2$). Това е така, защото най-долният ред на TAP_n се намалява с 2 (намалява се с двойката (b_n, s_n)). Ясно е, че оставащите триъгълници (или оставащият триъгълник) са триъгълници (или триъгълник) анти Паскал.

Дефиниция 2. Оставащите триъгълници (оставащият триъгълник) в резултат на процедурата в наблюдение 5. ще наричаме отделени триъгълници (отделен триъгълник).

За отделените триъгълници можем да разглеждаме съответните им редици от големи и малки числа. Аналогично на твърдение 1. и наблюдение 2. са в сила следващите две твърдения:

Твърдение 8. За всеки TAP_n стойностите на малките числа на отделените триъгълници са числата от множеството $\{n+1, n+2, ..., 2n-2\}$, които са разположени по едно на ред.

Твърдение 9. За всеки TAP_n най-големите стойности на големите числа на отделените триъгълници са $\frac{n(n+1)}{2} - 1$ и $\frac{n(n+1)}{2} - 2$, когато отделените триъгълници са два, а в случай на един отделен триъгълник най-голямата стойност на големите му числа е $\frac{n(n+1)}{2} - 1$. Най-големите стойности на големите числа се реализират на най-долните редове на отделените триъгълници.

Твърдение 10. Не съществува TAP_8.

Доказателство: Да допуснем противното и да разгледаме горните 3 реда на такъв триъгълник. Нека $b_1 = s_1 = a$, $s_2 = b$, а $b_3 = a + b$. Възможни са два случая:

<u>*Случай* 1</u>. Числото $s_3 = c$ е вдясно от b_3. Стойността на най-лявото число на третия ред, т.е. b_3 е без значение и затова по-долу е поставен въпросителен знак на това място. Най-дясното число на третия ред е означено с *x*.

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & a & & \\
 & a+b & & b & \\
? & & c & & x
\end{array}
$$

Тъй като малките числа на TAP_8 и на отделените триъгълници приемат всички цели стойности от 1 до $14 = 2.8 - 2$ включително, а $a+b$ е голямо число, то $a+b \geq 15$. Това е възможно само ако стойностите на a и b са 7 и 8 в някакъв ред. Но тогава $c \leq 6$ и следователно $x = b + c \leq 8 + 6 = 14$. Това не е възможно, защото x не е малко число.

<u>*Случай 2*</u>. Числото $s_3 = c$ е вляво от $b_3 = a+b+c$. Както и в предния случай $c \leq 6$. От друга страна b_3 е най-голямото число на третия ред и следователно $x < b_3$.

$$\begin{array}{ccccc} & & a & & \\ & a+b & & b & \\ c & & a+b+c & & x \end{array}$$

Тогава $x = a+b+c-b = a+c \leq 8+6 = 14$ и получаваме същото противоречие както в предния случай 1.

Твърдение 11. Не съществува TAP_7.

Няма да се спираме на доказателството на това твърдение, защото то използва аргументи както в доказателството на твърдение 10.

Твърдение 12. Не съществува TAP_n за $n > 8$.

Доказателство: Това твърдение съдържа твърдението в задача 3 като частен случай. Да допуснем, че съществува TAP_n за някое $n > 8$. Ако TAP_n има два отделени триъгълника и най-големите стойности на големите им числа са съответно A и B, то от твърдение 8. и наблюдение 1. следва, че

$$A + B \geq (n+1) + (n+2) + \ldots + (2n-2) = \frac{(3n-1)(n-2)}{2}.$$

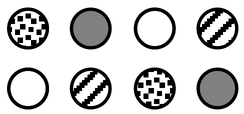
От друга страна от твърдение 8. имаме $A + B \leq \dfrac{n(n+1)}{2} - 1 + \dfrac{n(n+1)}{2} - 2 = n^2 + n - 3$ и следователно $\dfrac{(3n-1)(n-2)}{2} \leq n^2 + n - 3 \Leftrightarrow (n-1)(n-8) \leq 0$, което е нарушено при $n > 8$. В случай на един отделен триъгълник неравенството е

$$\frac{(3n-1)(n-2)}{2} \leq \frac{n(n+1)}{2} - 1 \Leftrightarrow n^2 - 4n + 2 \leq 0,$$

което е нарушено при $n > 4$.

Решение на задача 4.

Ще означаваме възлите с кръгчета, които считаме за точки. Да разгледаме конфигурация от 8 възела, образуващи правоъгълник 2×4 и да оцветим възлите в четири цвята, както е показано.

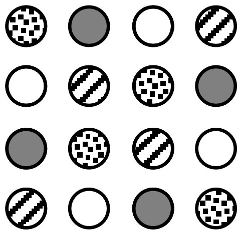


Възлите във всяка двойка едноцветни възли се намират на разстояние $\sqrt{5}$ един от друг и следователно в разглеждания правоъгълник 2×4 Мария може да постави най-много 4 червени камъчета. Тъй като мрежата 20×20 от 400 възела може да се раздели на 50 правоъгълника 2×4, заключаваме, че Мария може да постави най-много $50.4 = 200$ червени камъчета. Бройката 200 може да се реализира, ако оцветим мрежата 20×20 шахматно (бяло-черно) и поставим червените камъчета във възли от един и същ цвят, например черен.

Разсъжденията дотук наподобяват на решението на следната известна задача за шахматната дъска: Колко коня най-много могат да се разположат върху шахматна дъска 8×8 така, че никои два коня да не се „бият”? Отговорът е 32, а едно от възможните решения използва идеята от по-горе. Тази идея се основава на факта, че при всеки ход шахматният ход сменя цвета на полето.

И така, Мария може да използва най-много 200 възела, като възможна нейна стратегия би могла да бъде поставяне на червени камъчета само в черните полета на шахматно оцветената мрежа. Ясно е, че стратегията на Иван следва да бъде поставяне на сини камъчета във възли от избраната от Мария конфигурация от 200 възела (например черните полета). Тъй като Мария и Иван редуват ходовете си, то в най-добрия случай Иван може да попречи на Мария, ако поставя сини камъчета в половината от избраната конфигурация от 200 възела, т.е. в 100 възела.

Една възможна реализация на стратегията на Иван е следната. Да разделим мрежата 20×20 от 400 възела на 25 квадрата 4×4 и да оцветим възлите на всеки от квадратите в 4 цвята, както е показано:



Сега е достатъчно Иван да поставя синьо камъче във възела, който спрямо центъра на квадрата е симетричен на възела, в който Мария е поставила червено камъче. По този начин Мария ще може да използва само по един възел от всеки цвят, т.е. общо 4 възела. Заключаваме, че $K = 4.25 = 100$.

Задачата може да се обобщи по следния естествен начин:

Точката (x, y) в равнината се нарича *възел*, ако x и y са естествени числа, ненадминаващи $4n$, където n е произволно естествено число. Първоначално всичките $16n^2$ възела са незаети. Мария и Иван последователно правят ходове, като поставят камъчета във възлите. Мария започва първа. Когато Мария е на ход, тя поставя ново червено камъче в незает възел така, че разстоянието между кои да е два възела, заети от червени камъчета, да на е равно на $\sqrt{5}$. Когато Иван е на ход, той поставя ново синьо камъче в незает възел. (Възел, зает от синьо камъче, може да е на всякакво разстояние от зает възел.) Играта завършва, когато някой от играчите не може да направи ход. Да се намери максималното число K, за което Мария може да постави поне K червени камъчета, както и да играе Иван.

В този случай отговорът на задачата е $K = 4n^2$.

Решение на задача 5.

Естествен е въпросът дали съществува редица с посоченото свойство. Отговорът в случая на крайна редица се дава от една известна задача (задача 1, 10-12 клас, XXVII Турнир на градовете, 2005 г.), съгласно условието на която се търсят онези $n \in \mathrm{N}$, за които съществуват различни естествени числа $a_1, a_2, ..., a_n$ с посоченото свойство. При $n = 2$ отговорът е отрицателен. Да допуснем, че a_1 и a_2 са различни естествени числа, за които числото $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_1}$ е цяло. Нека d е най-големият общ делител на a_1 и a_2, т.е. $d = \gcd(a_1, a_2)$ (**g**reatest **c**ommon **d**ivisor, което в превод от английски е най-голям общ делител) и нека m и k са естествени числа, за които $a_1 = md$, $a_2 = kd$ и $\gcd(m, k) = 1$. Тогава

$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_1}=\frac{md}{kd}+\frac{kd}{md}=\frac{m}{k}+\frac{k}{m}=\frac{m^2+k^2}{mk}$, което означава, че числото $\frac{(m+k)^2}{mk}=\frac{m^2+k^2}{mk}+2$ е цяло. Но от $\gcd(m,k)=1$ следва, че $\gcd(m+k,m)=1$ и $\gcd(m+k,k)=1$ и значи $\frac{(m+k)^2}{mk}$ е цяло само ако $m=k=1$, което е противоречие, защото a_1 и a_2 са различни естествени числа.

При $n=1$ и $n>2$ отговорът на задачата е положителен. В първия случай числото $\frac{a_1}{a_1}=1$ е цяло и твърдението е очевидно, а във втория случай е достатъчно да вземем $a_1=1$, $a_2=n-1$, …, $a_n=(n-1)^{n-1}$. Тогава

$$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+...+\frac{a_{n-1}}{a_n}+\frac{a_n}{a_1}=$$
$$=\frac{1}{n-1}+\frac{n-1}{(n-1)^2}+...+\frac{(n-1)^{n-2}}{(n-1)^{n-1}}+\frac{(n-1)^{n-1}}{1}=(n-1)\cdot\frac{1}{n-1}+(n-1)^{n-1}=1+(n-1)^{n-1},$$

което е цяло число.

В решението на задача 5. ще използваме техниката на *p*-адичните оценки.

Дефиниция. Ако *p* е просто число и $n\neq 0$ е цяло, под *p*-адичен ред или *p*-адична оценка на *n* се разбира най-високата степен ν, за която p^{ν} дели *n*. Тя се бележи с $v_p(n)$. По дефиниция $v_p(0)=\infty$.

p-адична оценка може да се дефинира и за рационални числа. Нека $\frac{n}{d}$ е рационално число и $\gcd(n,d)=1$. Тогава $v_p\left(\frac{n}{d}\right)=v_p(n)$, ако $p\,|\,n$, $v_p\left(\frac{n}{d}\right)=-v_p(d)$, ако $p\,|\,d$ и $v_p\left(\frac{n}{d}\right)=0$, ако *p* не дели никое от тях.

Лесно се проверяват следните свойства:

1. Ако $\frac{n}{d}$ е рационално число, то $v_p\left(\frac{n}{d}\right)=v_p(n)-v_p(d)$.
2. $v_p(mn)=v_p(m)+v_p(n)$.
3. $v_p(m\pm n)\geq\inf\{v_p(m),v_p(n)\}$, като $v_p(m\pm n)=\inf\{v_p(m),v_p(n)\}$ в случай, че $v_p(m)\neq v_p(n)$.
4. Необходимо условие числото *a* да е цяло е $v_p(a)\geq 0$ за всяко просто число *p*.

Нека N е от условието на задача 5. и нека $n\geq N$. Тогава числата $\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+...+\frac{a_n}{a_{n+1}}+\frac{a_{n+1}}{a_1}$ и $\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+...+\frac{a_{n-1}}{a_n}+\frac{a_n}{a_1}$ са естествени и след изваждането им заключаваме, че числото

$$A_n=\frac{a_n}{a_{n+1}}+\frac{a_{n+1}}{a_1}-\frac{a_n}{a_1}=\frac{a_n}{a_{n+1}}+\frac{a_{n+1}-a_n}{a_1}$$

е цяло за всяко $n \geq N$. Ще докажем, че редицата от цели числа a_n, $n \geq N$, е *p*-адично ограничена, т.е. редицата $v_p(a_n)$ от *p*-адичните оценки е ограничена за всяко просто число *p*. Ако *p* е фиксирано просто число, нека $b_n = v_p(a_n)$. Възможни са няколко случая:

<u>*Случай* 1</u>. Нека $b_n \geq b_1$. Ще докажем, че $b_n \geq b_{n+1} \geq b_1$.

Да допуснем, че $b_{n+1} < b_1$. Тогава съгласно свойство 3. $v_p(a_{n+1} - a_n) = b_{n+1}$ и

$$v_p\left(\frac{a_{n+1} - a_n}{a_1}\right) = v_p(a_{n+1} - a_n) - v_p(a_1) = b_{n+1} - b_1 < 0 .$$

От друга страна $v_p\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) = v_p(a_n) - v_p(a_{n+1}) = b_n - b_{n+1} \geq 0$ и тогава съгласно свойство 3. $v_p(A_n) < 0$, което е противоречие, защото A_n е цяло число.

Сега да допуснем, че $b_{n+1} > b_n$. Имаме

$$v_p\left(\frac{a_{n+1} - a_n}{a_1}\right) = v_p(a_{n+1} - a_n) - v_p(a_1) = b_n - b_1 \geq 0 \, , \; v_p\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) = v_p(a_n) - v_p(a_{n+1}) = b_n - b_{n+1} < 0$$

и отново стигаме до противоречие с факта, че A_n е цяло число.

<u>*Случай* 2</u>. Нека $b_n \leq b_1$. Ще докажем, че $b_n \leq b_{n+1} \leq b_1$.

Да допуснем, че $b_{n+1} > b_1$. Тогава $v_p\left(\frac{a_n}{a_1}\right) = v_p(a_n) - v(a_1) = b_n - b_1$ и $v_p\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) = v_p(a_n) - v(a_{n+1}) = b_n - b_{n+1} < b_n - b_1 \leq 0$. Заключаваме, че $v_p\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) < v_p\left(\frac{a_n}{a_1}\right) \leq 0$. От друга страна $v_p\left(\frac{a_{n+1}}{a_1}\right) = v_p(a_{n+1}) - v_p(a_1) = b_{n+1} - b_1 > 0$ и следователно

$$v_p(A_n) = v_p\left(\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{a_n}{a_1}\right) + \left(\frac{a_{n+1}}{a_1}\right)\right) = v_p\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) < 0 ,$$

което е невъзможно защото A_n е цяло число.

Сега да допуснем, че $b_{n+1} < b_n$. Имаме

$$v_p\left(\frac{a_{n+1} - a_n}{a_1}\right) = v_p(a_{n+1} - a_n) - v_p(a_1) = b_{n+1} - b_1 < 0 \, , \; v_p\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) = v_p(a_n) - v_p(a_{n+1}) = b_n - b_{n+1} > 0$$

и отново стигаме до противоречие с факта, че A_n е цяло число.

От направените разглеждания следва, че ако $b_N \geq b_1$, то редицата $b_N, b_{N+1}, b_{N+2}, \ldots$ е нерастяща, а ако $b_N \leq b_1$, редицата е ненамаляваща и твърдението следва непосредствено.

Задачата може да се реши и без използване на техниката на *p*-адичните оценки. За целта, без да се спираме на подробностите, може да се използва, че

$$A_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+1}}{a_1} - \frac{a_n}{a_1} = \frac{a_1 a_n + a_{n+1}(a_{n+1} - a_n)}{a_1 a_{n+1}}$$

Тогава $a_1 \mid a_{n+1}(a_{n+1}-a_n)$. Ако $\gcd(a_1,a_{n+1})=d$, то $\frac{a_1}{d} \mid (a_{n+1}-a_n)$, откъдето $\gcd\left(\frac{a_1}{d},a_n\right)=1$ и следователно $\gcd(a_1,a_n) \mid d$. Заключаваме, че $\gcd(a_1,a_n) \le \gcd(a_1,a_{n+1})$ за всяко $n > \mathrm{N}$. В същото време $\gcd(a_1,a_{n+1}) \le a_1$ и значи съществува естествено число K така, че за всяко $n > K$ е изпълнено $\gcd(a_1,a_n)=d$. Нека $a_1 = dc$ и $a_n = db_n$ за $n > K$. Получаваме, че числото $\frac{cb_n + b_{n+1}(b_{n+1}-b_n)}{cb_{n+1}}$ е цяло, откъдето $b_{n+1} \mid cb_n$. Но $\gcd(c,b_{n+1})=1$ и следователно $b_{n+1} \mid b_n$. Оттук $b_{n+1} \le b_n$. Но b_n е положително и заключаваме, че съществува естествено число M така, че $b_n = b_{n+1}$ за всяко $n > M$.

Решение на задача 6.

Преди да изложим решението ще изучим някои свойства, свързани с конфигурацията от условието на задачата.

Лема 1. Всеки изпъкнал четириъгълник $ABCD$ притежава единствена вътрешна точка, за която са изпълнени равенствата $\angle XAB = \angle XCD$ и $\angle XBC = \angle XDA$.

Доказателство: Възможни са няколко случая.

Случай 1. $ABCD$ е успоредник. Тогава точката X е пресечната точка на диагоналите му. Единствеността следва от факта, че вътрешните точки *X*, за които $\angle XAB = \angle XCD$, лежат на диагонала *AC*, а вътрешните точки *X*, за които $\angle XBC = \angle XDA$, лежат на диагонала *BD*.

Случай 2.1. $ABCD$ е трапец, за който $AB \parallel CD$. Нека $BC \cap AD = W$. Тогава пресечната точка на диагонала AC и описаната около ΔBDW окръжност $k(BDW)$ е желаната точка X. Това се доказва по следния начин:

i) $\angle XAB = \angle XCD$ като кръстни ъгли; ii) $\angle XBC = \frac{\overset{\frown}{XDW}}{2} = \frac{\overset{\frown}{XD} + \overset{\frown}{DW}}{2} = \angle XDA$.

Единствеността следва от факта, че вътрешните точки *X*, за които $\angle XAB = \angle XCD$, лежат на диагонала *AC*. Освен това, вътрешните точки *X*, за които $\angle XBC = \angle XDA$, лежат на окръжността $k(BDW)$, защото от условието $\angle XBC = \angle XDA$ следва, че $\angle XBC + \angle XDW = 180^0$ и следователно точките *D*, *X*, *B* и *W* лежат на една окръжност (това е точно окръжността $k(BDW)$). В същото време диагоналът AC пресича $k(BDW)$ в единствена вътрешна точка за $ABCD$.

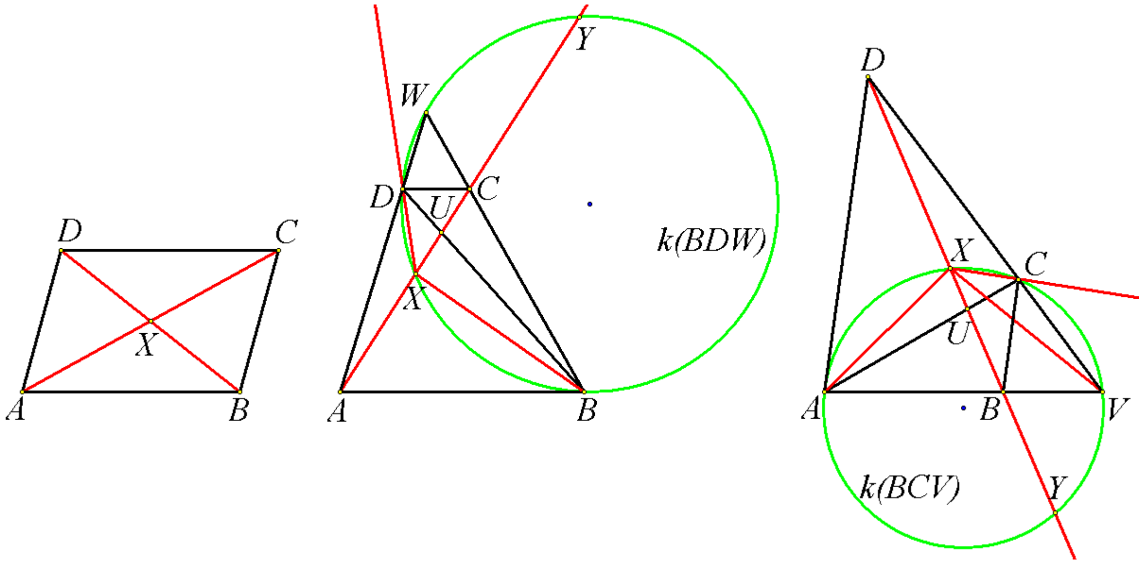
Да обърнем внимание, че втората пресечна точка Y на правата AC и $k(BDW)$ е такава, че $\angle YAB = 180° - \angle YCD$ и $\angle YBC = 180° - \angle YDA$.

Случай 2.2. $ABCD$ е трапец, за който $BC \parallel AD$. Нека $AB \cap CD = V$. Тогава пресечната точка на диагонала BD и описаната около ΔBCV окръжност $k(BCV)$ е желаната точка X. Това се доказва по следния начин:

i) $\angle XAB = \frac{\overset{\frown}{XCV}}{2} = \frac{\overset{\frown}{XC} + \overset{\frown}{CV}}{2} = \angle XCD$; ii) $\angle XBC = \angle XDA$ като кръстни ъгли.

Единствеността се обосновава както по-горе.

Да обърнем внимание, че втората пресечна точка Y на правата BD и $k(BCV)$ е такава, че $\angle YAB = 180° - \angle YCD$ и $\angle YBC = 180° - \angle YDA$.

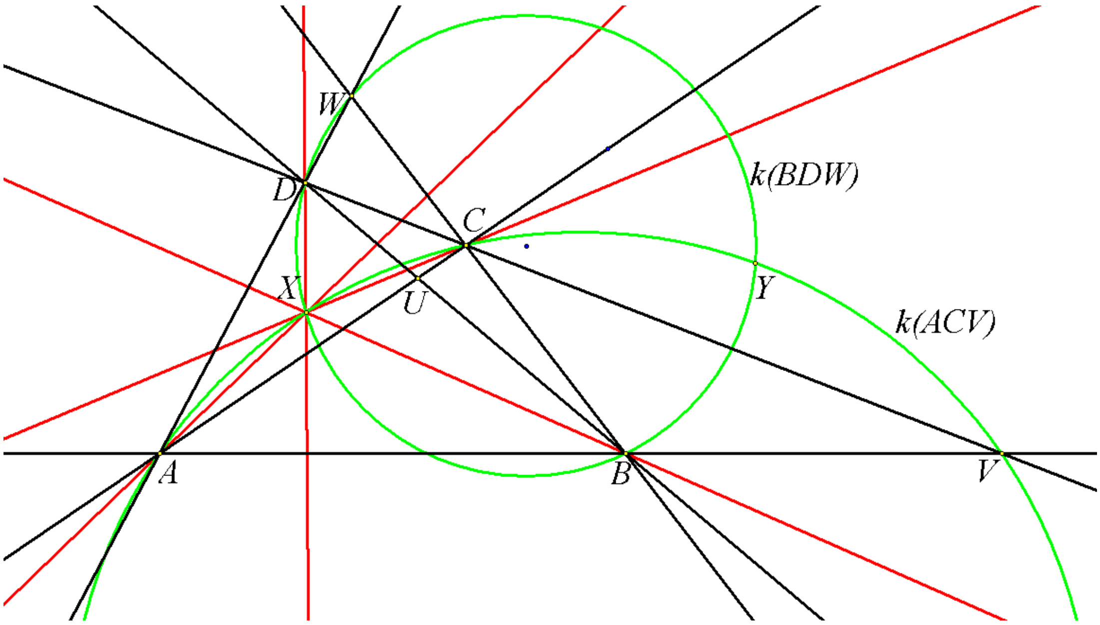


<u>*Случай* 3</u>. $ABCD$ няма успоредни страни. Нека $AB\cap CD=V$ и $BC\cap AD=W$. Тогава вътрешната за $ABCD$ пресечна точка на окръжностите $k(BCV)$ и $k(BDW)$, описани съответно около ΔBCV и ΔBDW, е желаната точка X. Това се доказва по следния начин:

i) $\angle XAB=\dfrac{\overset{\frown}{XCV}}{2}=\dfrac{\overset{\frown}{XC}+\overset{\frown}{CV}}{2}=\angle XCD$; ii) $\angle XBC=\dfrac{\overset{\frown}{XDW}}{2}=\dfrac{\overset{\frown}{XD}+\overset{\frown}{DW}}{2}=\angle XDA$.

Единствеността се обосновава както по-горе.

Да обърнем внимание, че втората пресечна точка Y на $k(BCV)$ и $k(BDW)$ е такава, че $\angle YAB=180^\circ-\angle YCD$ и $\angle YBC=180^\circ-\angle YDA$.



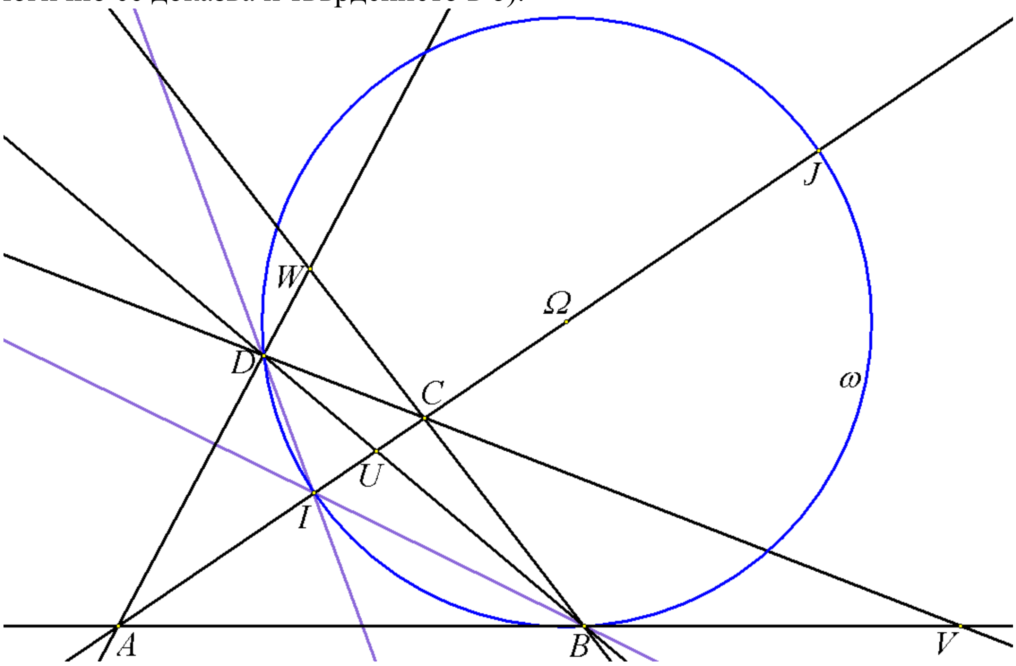
Лема 2. Ако страните на изпъкналия четириъгълник $ABCD$ удовлетворяват равенството $AB.CD=BC.DA$, то:

а) ъглополовящите на ъглите ABC и CDA се пресичат в точка от диагонала AC, която означаваме с I;

б) ъглополовящите на ъглите BAD и DCB се пресичат в точка от диагонала BD, която означаваме с I'.

Доказателство: а) Записваме даденото равенство във вида $\frac{BA}{BC}=\frac{DA}{DC}$. Нека I е такава точка от диагонала AC, че $\frac{IA}{IC}=\frac{BA}{BC}$. Тогава BI е ъглополовяща на $\angle ABC$. От друга страна е изпълнено и равенството $\frac{IA}{IC}=\frac{DA}{DC}$, което означава, че DI е ъглополовяща на $\angle CDA$.

Аналогично се доказва и твърдението в б).



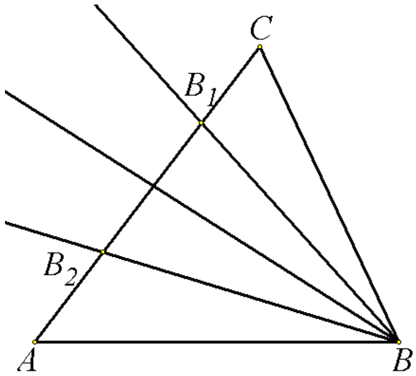
Да обърнем внимание, че ако $BA \neq BC$, върху правата AC съществува и втора точка J със свойството $\frac{JA}{JC}=\frac{BA}{BC}$. Добре известно е, че окръжността ω с диаметър IJ е геометричното място на точките M, за които $\frac{MA}{MC}=\frac{BA}{BC}$. Окръжността ω се нарича *Аполониева окръжност* за отсечката AC при отношение $\frac{BA}{BC}$. Затова, ако е даден произволен ΔABC, всяка точка D от Аполониевата окръжност ω е четвъртият връх на четириъгълник $ABCD$, за който $AB.CD = BC.DA$. Така получаваме една идея за построяване на четириъгълник, отговарящ на условията на задачата. От друга страна лема 1 дава възможност да се определи точката X за този четириъгълник.

Лема 3. Нека ABC е произволен триъгълник, а B_1 и B_2 са такива точки от правата AC (B_2 е между A и B_1), че правите BB_1 и BB_2 са симетрични спрямо ъглополовящата на $\angle ABC$. Тогава е изпълнено равенството $\frac{\overline{CB_1}}{\overline{AB_1}}.\frac{\overline{CB_2}}{\overline{AB_2}}=\frac{BC^2}{AB^2}$.

Доказателство: За лицата на триъгълниците BCB_1 и BAB_2 са изпълнени равенствата $\frac{S_{BCB_1}}{S_{BAB_2}}=\frac{CB_1}{AB_2}$ и $\frac{S_{BCB_1}}{S_{BAB_2}}=\frac{BC.BB_1.\sin\angle B_1BC}{AB.BB_2.\sin\angle B_2BA}=\frac{BC.BB_1}{AB.BB_2}$. Следователно $\frac{CB_1}{AB_2}=\frac{BC.BB_1}{AB.BB_2}$.

Аналогично от лицата на триъгълниците CBB_2 и ABB_1 имаме равенството $\frac{CB_2}{AB_1} = \frac{BC.BB_2}{AB.BB_1}$.

След почленно умножаване на получените равенства намираме $\frac{CB_1}{AB_1} . \frac{CB_2}{AB_2} = \frac{BC^2}{AB^2}$.



Лема 4. Ако за изпъкналия четириъгълник $ABCD$ е изпълнено равенството $AB.CD = BC.DA$, то:

а) симетричните образи на диагонала BD спрямо ъглополовящите на $\angle ABC$ и $\angle CDA$ се пресичат в точка от диагонала AC, която означаваме с K;

б) симетричните образи на диагонала AC спрямо ъглополовящите на $\angle BAD$ и $\angle DCB$ се пресичат в точка от диагонала BD, която означаваме с K'.

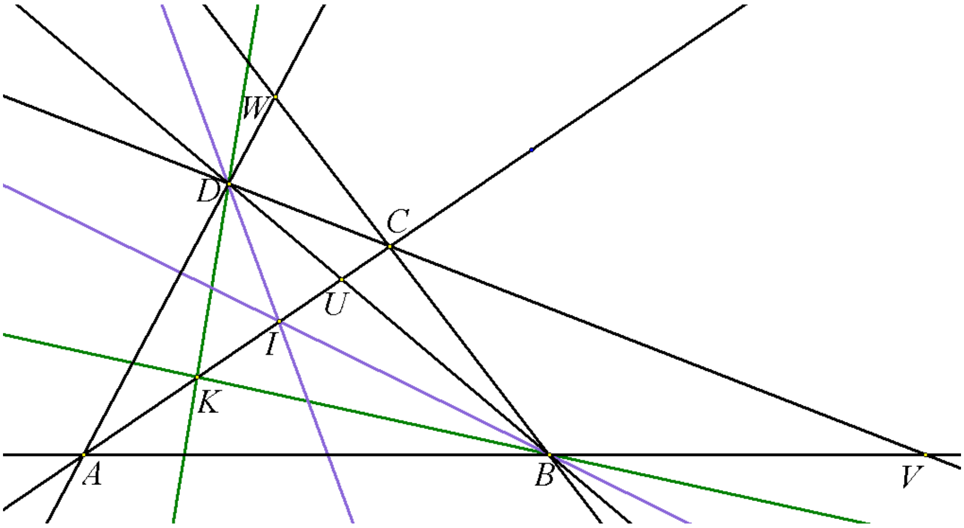
Доказателство: Означаваме с U пресечната точка на диагоналите AC и BD.

а) Нека симетричните образи на BD спрямо ъглополовящите на $\angle ABC$ и $\angle CDA$ пресичат AC съответно в точките K_1 и K_2. Прилагаме лема 3 за ΔABC и получаваме равенството $\frac{CU}{AU} . \frac{CK_1}{AK_1} = \frac{BC^2}{AB^2}$. След прилагане на лема 3 за ΔCDA получаваме $\frac{AU}{CU} . \frac{AK_2}{CK_2} = \frac{DA^2}{CD^2}$. От почленното умножаване на последните две равенства следва $\frac{CK_1.AK_2}{AK_1.CK_2} = \left(\frac{BC.DA}{AB.CD} \right)^2 = 1$. Следователно $\frac{AK_2}{CK_2} = \frac{AK_1}{CK_1}$. Тъй като точките K_1 и K_2 принадлежат на отсечката AC, последното равенство означава, че точките K_1 и K_2 съвпадат, т.е. $K_1 = K_2 = K$.

Аналогично се доказва и твърдението б) за точката K'.

От лема 4 следва, че точката I е център на вписаната в ΔBDK окръжност. Затова AC е ъглополовяща на $\angle BKD$. Следователно $180^\circ = \angle AKD + \angle DKC = \angle AKD + \angle BKC$. Така получаваме следното

Следствие. *Изпълнени са равенствата* $\angle AKD + \angle BKC = 180^\circ$ *и* $\angle BK'A + \angle CK'D = 180^\circ$.



Лема 5. Ако за изпъкналия четириъгълник $ABCD$ е изпълнено равенството $AB.CD = BC.DA$, то:

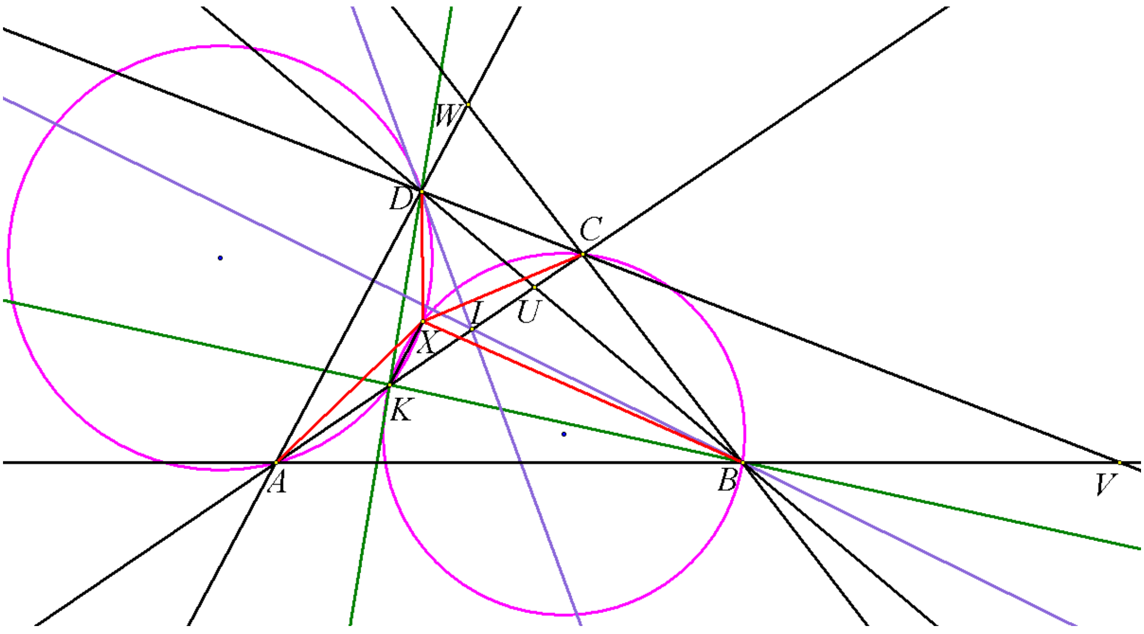
а) Втората обща точка X на окръжностите $k(BCK)$ и $k(DAK)$, които са описани съответно около ΔBCK и ΔDAK, е такава, че $\angle XAB = \angle XCD$ и $\angle XBC = \angle XDA$.

б) Втората обща точка X на окръжностите $k(BCK')$ и $k(DAK')$, които са описани съответно около $\Delta BCK'$ и $\Delta DAK'$, е такава, че $\angle XAB = \angle XCD$ и $\angle XBC = \angle XDA$.

Доказателство: а) За да докажем първото равенство, достатъчно е да установим, че точката X принадлежи на описаната около ΔACV окръжност $k(ACV)$ (както е показано в лема 1). Изпълнени са равенствата:

$$\angle CXA = \angle CXK + \angle KXA = 180^\circ - CBK + \frac{\overset{\frown}{AK}}{2} = 180^\circ - \angle DBA + \angle ADK =$$
$$= \angle DBV + \angle BDV = 180^\circ - \angle AVD.$$

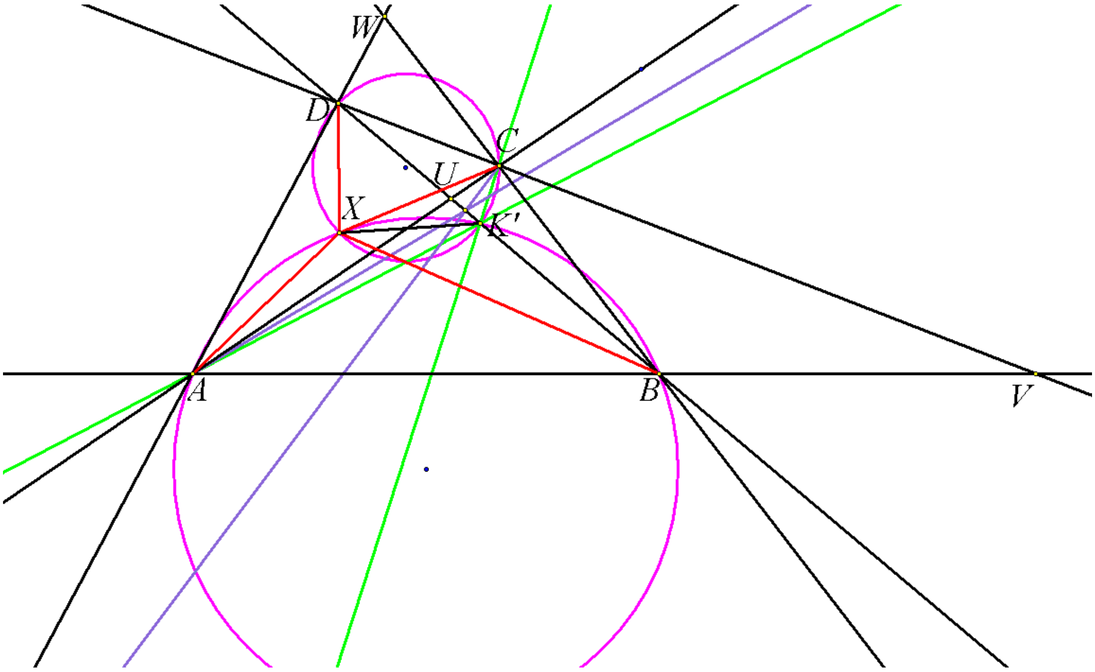
Следователно $\angle CXA + \angle AVD = 180^\circ$. Това равенство означава, че точката X принадлежи на описаната окръжност около ΔACV. Затова $\angle XAB = \angle XCD$.



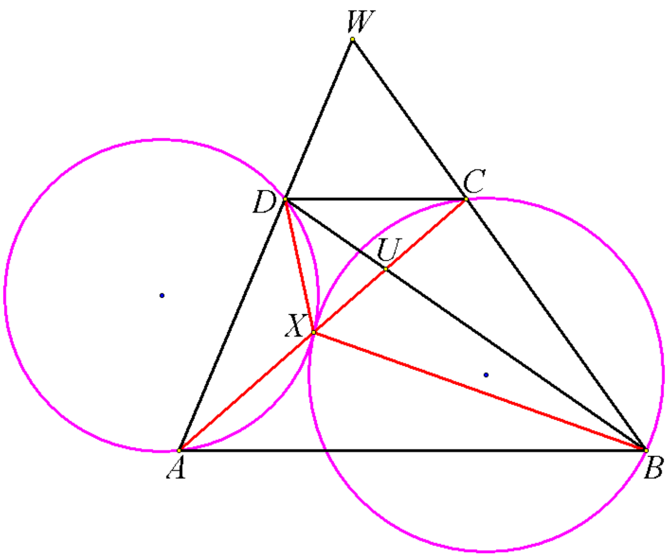
Второто равенство се получава по следния начин:

$$\angle XBC = \frac{\overset{\frown}{XC}}{2} = \angle XKC = 180^\circ - \angle AKX = \angle XDA.$$

Твърдението б) за другата двойка окръжности се доказва по същия начин.



Трябва да се отбележи, че когато $AB \parallel CD$, точката X съвпада с K. В този случай окръжностите $k(BCK)$ и $k(DAK)$ се допират в точката X.



Ето и решението на задача 6. Ако $ABCD$ е успоредник, равенството $AB.CD = BC.DA$ е изпълнено само когато $ABCD$ е ромб. Тъй като точката X е пресечната точка на диагоналите му, то $\angle BXA + \angle DXC = 90° + 90° = 180°$. Нека сега $ABCD$ е такъв, че поне две от страните му не са успоредни. Тъй като, според лема 5, точката X принадлежи на окръжностите $k(BCK)$ и $k(DAK)$, то $\angle DXA + \angle BXC = \angle AKD + \angle BKC$. От следствието получаваме $\angle DXA + \angle BXC = 180°$. Но $(\angle BXA + \angle DXC) + (\angle DXA + \angle BXC) = 360°$. Следователно $\angle BXA + \angle DXC = 180°$. Ако разгледаме точката X като обща за окръжностите $k(BCK')$ и $k(DAK')$, от лема 5 и следствието се получава желаното равенство по следния начин $\angle BXA + \angle DXC = \angle BK'A + \angle CK'D = 180°$.

Ще се въздържим от коментар относно представянето на българските ученици по отделните задачи. Категоричен извод обаче може да се направи. А той е, че заключителните подготовки на българските отбори са незадоволителни. Имаме добри учители, които готвят добри ученици. Но на тези добри ученици липсват надграждащи знания, за да могат да се справят с трудните задачи. Изложените по-горе решения доказват, че такива надграждащи знания са абсолютно необходими. За съжаление тези, които са си присвоили властта да ги преподават, не притежават необходимия капацитет и подход. Ето равносметката за последните 35 години, от която много ясно се вижда „кой кой е”.

година	**зад.1**	**зад.2**	**зад.3**	**зад.4**	**зад.5**	**зад.6**	**точки**	**място**	**зл.**	**ср.**	**бр.**	**Научен ръководител**
2018	42	30	2	35	29	8	146	21	1	3	1	**Петър Бойваленков**
2017	40	31	0	42	1	2	116	18	0	4	2	**Петър Бойваленков**
2016	42	13	3	42	18	14	132	18	0	3	3	**Петър Бойваленков**
2015	36	13	9	32	5	5	100	29	0	2	1	**Петър Бойваленков**
2014	39	25	2	42	12	0	120	37	0	3	1	**Петър Бойваленков**
ОБЩО	**199**	**112**	**16**	**193**	**65**	**29**	**614**		**1**	**15**	**8**	
2013	31	24	5	28	13	0	101	38	0	1	2	**Николай Николов**
2012	42	22	7	38	4	3	116	19	1	2	2	**Николай Николов**
2011	42	1	15	37	22	4	121	20	0	2	3	**Николай Николов**
2010	41	22	1	42	5	7	118	21	1	2	3	**Николай Николов**
2009	42	38	9	32	36	0	157	19	1	3	2	**Николай Николов**
ОБЩО	**596**	**107**	**37**	**177**	**80**	**14**	**613**		**3**	**10**	**12**	
2008	42	28	14	35	19	16	154	14	2	1	3	**Емил Колев**
2007	34	35	4	42	32	2	149	9	2	3	1	**Емил Колев**
2006	42	14	4	42	14	0	116	21	0	4	1	**Емил Колев**
2005	38	32	15	36	35	17	173	11	2	3	1	**Емил Колев**
2004	39	36	22	42	36	19	194	5	3	3	0	**Емил Колев**
ОБЩО	**195**	**145**	**59**	**197**	**136**	**54**	**786**		**9**	**14**	**6**	

2003	37	34	41	42	37	36	227	1	6	0	0	**Сава Гроздев**
2002	32	40	11	34	36	14	167	4	3	2	1	**Сава Гроздев**
2001	41	19	12	42	35	36	185	4	3	3	0	**Сава Гроздев**
2000	42	35	5	25	30	32	169	4	2	3	1	**Сава Гроздев**
1999	41	23	10	42	25	29	170	5	3	3	0	**Сава Гроздев**
ОБЩО	**193**	**151**	**79**	**185**	**163**	**147**	**918**		**17**	**11**	**2**	
1998	36	36	15	35	37	36	195	2	3	3	0	**Олег Мушкаров**
1997	29	42	28	40	42	10	191	7	2	3	1	**Олег Мушкаров**
1996	21	37	22	31	13	12	136	11	1	4	1	**Олег Мушкаров**
1995	41	35	41	41	35	14	207	6	1	4	1	**Олег Мушкаров**
1994	36	42	42	34	41	28	223	4	3	2	1	**Олег Мушкаров**
ОБЩО	**163**	**192**	**148**	**181**	**168**	**100**	**952**		**10**	**16**	**4**	
1993	24	29	23	32	42	28	178	3	2	4	0	**Любомир Давидов**
1992	35	14	14	35	9	20	127	15	1	1	3	**Любомир Давидов**
1991	42	42	22	30	41	15	192	7	0	3	3	**Любомир Давидов**
1990	36	33	23	17	34	9	152	9	1	4	1	**Любомир Давидов**
1989	18	41	18	42	42	34	195	7	1	3	2	**Любомир Давидов**
ОБЩО	**155**	**159**	**100**	**156**	**168**	**106**	**844**		**5**	**15**	**9**	
1988	42	9	16	21	42	14	144	8	0	4	2	**Иван Тонов**
1987	38	42	28	36	41	25	210	7	1	3	2	**Иван Тонов**
1986	30	35	3	20	35	38	161	7	1	3	2	**Иван Тонов**
1985	42	35	10	22	33	23	165	4	2	3	0	**Иван Тонов**
1984	42	34	20	41	36	30	203	2	2	3	1	**Иван Тонов**
ОБЩО	**194**	**155**	**77**	**140**	**187**	**130**	**883**		**6**	**16**	**7**	

Следващата международна олимпиада, която е юбилейна (60-а поред), ще се проведе във Великобритания през м. юли 2019 г. Домакин ще бъде Университетът в гр. Бат.